

・ 確率変数について

確率変数  $X$  を数学的に定義すると「確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  において、標本空間  $\Omega$  から実数空間  $R$  への写像 (関数) で… (以下省略)」となり測度論を行う必要がある。実際に統計を行うだけであれば、そこまでの知識は必要ないため、ここでは簡単な例を挙げて説明する。

「サイコロを1回振ったときの出た目」を  $X$  とする。このとき  $X$  として、1の目が出るか、2の目が出るか、…、6の目が出るかは振ってみないとわからない。しかし、その確率は「どの目も出る確率は等しく  $\frac{1}{6}$ 」と与えられている。このようにどのような値を取るかの確率が与えられているような変数  $X$  のことを確率変数と呼ぶ。

- 例. サイコロを投げる：振ったとき、どの目 (1~6) が出るか
- コイン投げ：投げたとき、表が出るか裏が出るか
- 身長 (体重)：その人の身長 (体重) は何 cm(kg) か

・ 離散型確率変数と連続型確率変数

確率変数  $X$  の取り得る値は、サイコロの目のように 1, 2, 3, 4, 5, 6 と飛び飛びの値を取るときと、身長や体重のように 170.62... と連続した実数の値を取る場合がある。前者のように、可算個の値を取るときを離散型と呼び、後者のような連続の値を取るとき連続型と呼ぶ。通常、離散型の場合の確率はある点  $x$  になる確率で、連続型の場合の確率はある区間  $[a, b]$  に入る確率である。

確率の表し方

確率変数  $X$  が  $x_i$  となる確率は  $p_i$  である (離散型)。

$$P(X = x_i) = p_i$$

確率変数  $X$  が区間  $[a, b]$  に入る確率は  $p_i$  である (連続型)。

$$P(a < X \leq b) = p_i$$

(注意：確率変数は大文字で、実際の値は小文字で書く)

・ 確率分布について

確率分布の定義は離散型、連続型を問わず

$$F(x) = P(-\infty < X \leq x) \quad \left( F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1 \right)$$

のように、 $x$  以下になる確率を表す関数で定義される。

また連続型の場合に確率分布が微分可能であるとき、その導関数

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

のことを  $X$  の確率密度関数と呼ぶ。確率密度関数が与えられたとき、連続型の確率は積分を使って

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

で計算できる。この式から連続型において一点  $x$  の確率は 0 であることがわかる。

## ・ 確率分布の例（離散型の場合）

### ・ 幾何分布

表が出る確率が  $p$  となるコイン投げを考える。このコイン投げにおいて、初めて表が出るまにかかった失敗の回数を確率変数  $X$  とすると、 $X$  は幾何分布に従う。

$k$  回連続して失敗し、 $k + 1$  回目に初めて表が出る確率は

$$P(X = k) = (1 - p)^k \times p \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

参考) 幾何分布の全事象 (0 回目から無限回まで) の和は確かに 1 となる。

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - p)^k p = \frac{p}{1 - (1 - p)} = 1$$

幾何分布の平均及び分散

$$\text{平均} : \mu = \frac{1 - p}{p} \quad \text{分散} : \sigma^2 = \frac{1 - p}{p^2}$$

### ・ 二項分布

表が出る確率が  $p$  となるコイン投げを考える。このコイン投げを  $n$  回したときにおける表の出た回数を確率変数  $X$  とすると、 $X$  は二項分布に従う。

二項分布の確率は次のように与えられる

$$P(X = k) = {}_n C_k \times p^k \times (1 - p)^{n - k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n - 1, n)$$

ここで  ${}_n C_k$  は  $n$  個の中から  $k$  個取り出す組み合わせの数で

$${}_n C_k = \frac{n!}{k!(n - k)!} \quad (\text{ただし } n! = 1 \times 2 \times \dots \times n, \quad 0! = 1)$$

によって計算できる ( $n!$  は  $n$  の階乗と読む)。

参考) 二項分布の平均及び分散

$$\text{平均} : \mu = np \quad \text{分散} : \sigma^2 = np(1 - p)$$

## ・ 離散型確率の計算

次の確率の値を求めよ

- 1) 表が出る確率を  $p = \frac{3}{4}$  としたとき、6回目に初めて表が出る確率。
- 2) 表が出る確率を  $p = \frac{2}{3}$  としたとき、4回中3回表が出る確率。
- 3) 表が出る確率を  $p = \frac{2}{5}$  としたとき、5回中2回裏が出る確率。

(ヒント：1は幾何分布、2, 3は二項分布となる)

|                                |    |    |   |         |     |  |
|--------------------------------|----|----|---|---------|-----|--|
| 2019年度神奈川工科大学<br>数理統計学<br>演習問題 | 学科 | 学年 | 組 | 学 籍 番 号 | 氏 名 |  |
|                                |    |    |   |         |     |  |

提出先：K3-3309号室前 19番のボックス 提出期限：10月 3日(木) 17時頃まで