

- 1) 表が出る確率を  $p = \frac{3}{5}$  としたとき、6 回目に初めて表が出る確率。

幾何分布の形に合わせると

「5 回連続して裏が出た後、6 回目に初めて表が出る確率」

なので、 $p = \frac{3}{5}, k = 5$  を代入すればよい。よって確率は、

$$P(X = 5) = \left(1 - \frac{3}{5}\right)^5 \times \frac{3}{5} = \frac{32}{3125} \times \frac{3}{5} = \frac{96}{15625} \left(= 0.006144 = 6.14 \times 10^{-3}\right)$$

- 2) 表が出る確率を  $p = \frac{1}{3}$  としたとき、5 回中 2 回表が出る確率。

$p = \frac{1}{3}, n = 5, k = 2$  の二項分布の確率を計算すればよい。

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= {}_5C_2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{5-2} = \frac{4 \times 5}{1 \times 2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ &= 10 \times \frac{1}{9} \times \frac{8}{27} = \frac{80}{243} \left(= 0.32921 \dots = 0.329\right) \end{aligned}$$

- 3) 表が出る確率を  $p = \frac{3}{4}$  としたとき、4 回中 3 回裏が出る確率。

4 回中 3 回裏が出るということは、4 回中 1 回表が出ればよいので、

$p = \frac{3}{4}, n = 4, k = 1$  の二項分布の確率を計算すればよい。

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= {}_4C_1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 \times \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{4-1} = \frac{4}{1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \\ &= 4 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{64} = \frac{3}{64} \left(= 0.046875 = 4.69 \times 10^{-2}\right) \end{aligned}$$

《別解》裏の出る確率のまま、 $p = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}, n = 4, k = 3$  の二項分布の確率でも良い。

$$P(X = 3) = {}_4C_3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{4-3} = \frac{2 \times 3 \times 4}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{1}{64} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$$

《注意》何人かの学生が解答を「 $1 - (\text{裏が3回出る確率})$ 」としているが、  
これでは「裏が3回ではない確率」=「表が1回以外になる確率」となる。

数理統計学において、確率の値は既約分数（これ以上約分できない分数）または有効数字3桁以上で答えることとする。既約分数でない場合や、有効数字が3桁に満たない場合は1点減点となるので注意。有効数字については裏面を参照のこと。

## 有効数字について

工学の世界では実際に何かを測定した場合、有効数字として記入された桁数までは信頼できる値であることを示しているため、有効数字を正確に取り扱うことは非常に重要である。本来であれば、途中計算の桁数や最終結果の桁の処理方法（いわゆる四捨五入や切捨て等）に関しても色々と細かい計算規則があるが、この授業ではごく一般的に用いられている有効桁数+1桁目を四捨五入したものと考える。

### 1) 有効数字の桁数について

有効数字の定義はいくつかあるが、ここでは簡単に先頭から連続した0を除いて、残った数字の数を有効数字とする。例えば

12.345 → 有効数字5桁

0.123 → 有効数字3桁 ← 左側にある“0.”の部分は有効桁数として数えない

0.0012 → 有効数字2桁 ← 左側にある“0.00”の部分は有効桁数として数えない

のようになる。次に1万や1億などの大きな桁数の数字の場合で有効数字の桁数を本来の桁数よりも小さくする場合は、次のようにする。

1万を有効数字3桁 →  $1.00 \times 10^4$  “10,000”と書くと有効数字5桁になる

7億2千万を有効数字2桁 →  $7.2 \times 10^8$  “720,000,000”と書くと有効数字9桁になる

つまり、 $a.bcd \times 10^n$ の形で書くと有効桁数が分かりやすい。

12.345 →  $1.2345 \times 10$

0.123 →  $1.23 \times 10^{-1}$

0.0012 →  $1.2 \times 10^{-3}$

注意) 1万を有効数字3桁書く場合、右側の「0」には意味があるので、間違っても消してはならない。

### 2) 演算による有効数字の変化

有効数字を考慮した場合四則演算によって有効数字の桁数が変わる場合があるので注意が必要である。特に有効数字の桁数が違うものの演算を行ったとき、ほとんどの場合において精度の悪いほうに揃う（つまり有効桁数が上がることはない！）。また同じような数の引き算を行うと、有効桁数が低くなるので注意が必要となる。

この授業においては、特に断りがなければ有効数字3桁以上で答えることとする（演算による有効数字の変化については特に厳しく見ない）。有効数字が良く分からない場合は、とりあえず電卓の結果をすべて書き表せば試験では正解とする。ちなみに、有効数字の桁数が足りない場合（注意：電卓の結果が「0.25」の場合の解答は「0.250」となる）、および分数で記入した場合に既約分数（完全に約分されている）で無い場合は減点の対象（通常-1点）となるので、注意してください。

・ 確率分布と連続型確率の計算について

確率分布の定義は離散型、連続型を問わず、次のように  $x$  以下になる確率で定義される。

$$F(x) = P(-\infty < X \leq x) \quad \left( F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1 \right)$$

また連続型の場合に確率分布が微分可能であるとき、その導関数

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

のことを  $X$  の確率密度関数と呼ぶ。このとき、連続型の確率は積分を使って

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

で計算できる。この式から連続型において一点  $x$  になる確率の値は0であることがわかる。さらに、 $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$  である。

・ 確率分布の例（連続型の場合）

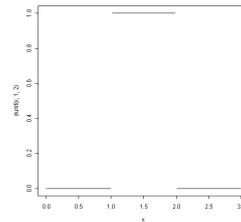
・ 一様分布 (パラメータは  $a, b$ )

ある区間  $[a, b]$  で一様に分布している。実際には確率密度関数が常に一定の分布。

確率密度関数:  $f(x) = \frac{1}{b-a} \quad (a \leq x \leq b)$

分布関数:  $F(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad (a \leq x \leq b)$

平均:  $\mu = \frac{a+b}{2}$       分散:  $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$



例 区間  $[1, 4]$  の一様分布に従う確率変数  $X$  が区間  $(2, 3]$  に入る確率

$$P(2 < X \leq 3) = \int_2^3 \frac{1}{3} dx = \left[ \frac{1}{3}x \right]_2^3 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = 0.3333 \dots = 0.333$$

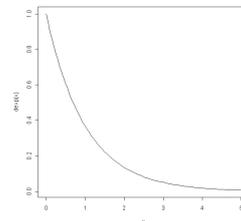
・ 指数分布 (パラメータは  $\lambda$ )

統計でよく用いられる基本的な分布の一つ。到着時間間隔の分布などとして使われる。

確率密度関数:  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (0 < x)$

分布関数:  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (0 < x)$

平均:  $\mu = \frac{1}{\lambda}$       分散:  $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$



また、指数分布は無記憶性  $P(X > t + s | X > t) = P(X > s)$  を持っている。

例  $\lambda = 1$  の指数分布に従う確率変数  $X$  が区間  $(2, 3]$  に入る確率

$$P(2 < X \leq 3) = \int_2^3 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_2^3 = e^{-2} - e^{-3} = 0.08554 \dots = 0.0855$$

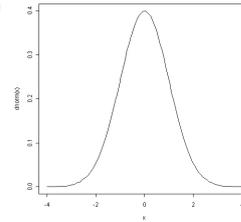
・正規分布 (パラメータは  $\mu, \sigma^2$ )

統計で最も用いられる基本的な分布。身長・体重や誤差の分布などとして使われる。

$$\text{確率密度関数: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\text{分布関数: } F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$$\text{平均: } \mu \quad \text{分散: } \sigma^2$$



また、正規分布は  $N(\mu, \sigma^2)$  と書くことが多い。特に  $N(0, 1)$  を標準正規分布と呼ぶ。

—正規分布の確率計算—

一般に正規分布の確率密度関数は定積分することができないので、コンピュータや近似値の表を使って計算する。「R」を使った計算は来週行うので、ここでは表を使った計算法を示す。

例 確率変数  $X$  が正規分布  $N(5, 2^2)$  に従うとき、区間  $[2, 6]$  に入る確率

1. 表は標準正規分布の確率の値のみなので、 $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$  で変換する。

$$z = \frac{x - 5}{2} \text{ で変換すると区間は } \left[\frac{2-5}{2}, \frac{6-5}{2}\right] = [-1.5, 0.5] \text{ となる。}$$

つまり、正規分布  $N(5, 2^2)$  に従うとき、区間  $[2, 6]$  に入る確率と標準正規分布  $N(0, 1^2)$  に従うとき、区間  $[-1.5, 0.5]$  に入る確率が等しい。

2. 表は  $P(0 < z \leq a)$  なので、0からの確率になるように変形する。

$[-1.5, 0.5]$  を0で分割して  $[-1.5, 0]$  と  $[0, 0.5]$  の2つの確率の和と考える。  
また、正規分布は左右対称なので、 $[-1.5, 0]$  と  $[0, 1.5]$  の確率は等しい。

3. 表の値を読んで確率の計算をする。

$$\begin{aligned} P(2 \leq x \leq 6) &= P(-1.5 \leq x \leq 0.5) \\ &= P(-1.5 \leq x \leq 0) + P(0 < x \leq 0.5) \\ &= P(0 \leq x \leq 1.5) + P(0 < x \leq 0.5) \\ &= 0.43319 + 0.19146 = 0.62465 = 0.625 \end{aligned}$$

来週から R を使った講義になりますので、ノートパソコンを忘れずに !!

## 数理統計学 R のインストールチェックと簡単な使い方

### ・ R のインストールチェック

- ・ R が起動するかチェック
- ・ R を起動したとき、日本語が文字化けしていないかチェック  
(日本語を使うときはフォントを MS Gothic にするのがお勧め。  
編集 → GUI プリファレンスのフォントを変更)
- ・ 簡単な式 (例.  $1+1$ ) を入れて答の確認
- ・ 「demo(graphics)」と入力して、デモの動作確認

上記のことが全て動作すれば問題なし

### ・ R の簡単な使い方

- ・  $[0, 1]$  の一様乱数を 10 個発生  

```
runif(10)
```
- ・ データを入力してヒストグラムを書く  

```
x <- c(11,13,17,20,25,27,28,30,31,33,32,27) ← 括弧の中身は何でも可  
hist(x)
```
- ・ 一様乱数のヒストグラムを書く  

```
x <- runif(100) ← 括弧の中身は乱数の数  
hist(x)
```
- ・ 標準正規分布に従う乱数のヒストグラムを書く  

```
x <- rnorm(100) ← 括弧の中身は乱数の数  
hist(x)
```
- ・ 三角関数 ( $\sin x$ ) のグラフを描く  

```
curve(sin(x),-5,5)
```
- ・ 標準正規分布のグラフを描く  

```
curve(dnorm(x),-4,4)
```
- ・ 標準正規分布従う乱数のヒストグラムと標準正規分布のグラフを描く  

```
x <- rnorm(100)  
hist(x,xlim=c(-4,4),ylim=c(0,0.5),freq=F)  
par(new="T") ← グラフの上書き命令  
curve(dnorm(x),-4,4,ylim=c(0,0.5))
```
- ・ おまけ ヒストグラムの幅を固定  

```
hist(x,breaks = seq(-5,5,0.5)) ← -5 から 5 まで 0.5 刻みで
```

標準正規分布の確率  $P(0 < z \leq a) = p$   $a \rightarrow p$ 

$a$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.00000	.00399	.00798	.01197	.01595	.01994	.02392	.02790	.03188	.03586
0.1	.03983	.04380	.04776	.05172	.05567	.05962	.06356	.06749	.07142	.07535
0.2	.07926	.08317	.08706	.09095	.09483	.09871	.10257	.10642	.11026	.11409
0.3	.11791	.12172	.12552	.12930	.13307	.13683	.14058	.14431	.14803	.15173
0.4	.15542	.15910	.16276	.16640	.17003	.17364	.17724	.18082	.18439	.18793
0.5	.19146	.19497	.19847	.20194	.20540	.20884	.21226	.21566	.21904	.22240
0.6	.22575	.22907	.23237	.23565	.23891	.24215	.24537	.24857	.25175	.25490
0.7	.25804	.26115	.26424	.26730	.27035	.27337	.27637	.27935	.28230	.28524
0.8	.28814	.29103	.29389	.29673	.29955	.30234	.30511	.30785	.31057	.31327
0.9	.31594	.31859	.32121	.32381	.32639	.32894	.33147	.33398	.33646	.33891
1.0	.34134	.34375	.34614	.34849	.35083	.35314	.35543	.35769	.35993	.36214
1.1	.36433	.36650	.36864	.37076	.37286	.37493	.37698	.37900	.38100	.38298
1.2	.38493	.38686	.38877	.39065	.39251	.39435	.39617	.39796	.39973	.40147
1.3	.40320	.40490	.40658	.40824	.40988	.41149	.41308	.41466	.41621	.41774
1.4	.41924	.42073	.42220	.42364	.42507	.42647	.42785	.42922	.43056	.43189
1.5	.43319	.43448	.43574	.43699	.43822	.43943	.44062	.44179	.44295	.44408
1.6	.44520	.44630	.44738	.44845	.44950	.45053	.45154	.45254	.45352	.45449
1.7	.45543	.45637	.45728	.45818	.45907	.45994	.46080	.46164	.46246	.46327
1.8	.46407	.46485	.46562	.46638	.46712	.46784	.46856	.46926	.46995	.47062
1.9	.47128	.47193	.47257	.47320	.47381	.47441	.47500	.47558	.47615	.47670
2.0	.47725	.47778	.47831	.47882	.47932	.47982	.48030	.48077	.48124	.48169
2.1	.48214	.48257	.48300	.48341	.48382	.48422	.48461	.48500	.48537	.48574
2.2	.48610	.48645	.48679	.48713	.48745	.48778	.48809	.48840	.48870	.48899
2.3	.48928	.48956	.48983	.49010	.49036	.49061	.49086	.49111	.49134	.49158
2.4	.49180	.49202	.49224	.49245	.49266	.49286	.49305	.49324	.49343	.49361
2.5	.49379	.49396	.49413	.49430	.49446	.49461	.49477	.49492	.49506	.49520
2.6	.49534	.49547	.49560	.49573	.49585	.49598	.49609	.49621	.49632	.49643
2.7	.49653	.49664	.49674	.49683	.49693	.49702	.49711	.49720	.49728	.49736
2.8	.49744	.49752	.49760	.49767	.49774	.49781	.49788	.49795	.49801	.49807
2.9	.49813	.49819	.49825	.49831	.49836	.49841	.49846	.49851	.49856	.49861

標準正規分布の確率  $P(0 < z \leq a) = p$   $p \rightarrow a$ 

$p$	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.40	1.282	1.287	1.293	1.299	1.305	1.311	1.317	1.323	1.329	1.335
0.41	1.341	1.347	1.353	1.359	1.366	1.372	1.379	1.385	1.392	1.398
0.42	1.405	1.412	1.419	1.426	1.433	1.440	1.447	1.454	1.461	1.468
0.43	1.476	1.483	1.491	1.499	1.506	1.514	1.522	1.530	1.538	1.546
0.44	1.555	1.563	1.572	1.580	1.589	1.598	1.607	1.616	1.626	1.635
0.45	1.645	1.655	1.665	1.675	1.685	1.695	1.706	1.717	1.728	1.739
0.46	1.751	1.762	1.774	1.787	1.799	1.812	1.825	1.838	1.852	1.866
0.47	1.881	1.896	1.911	1.927	1.943	1.960	1.977	1.995	2.014	2.034
0.48	2.054	2.075	2.097	2.120	2.144	2.170	2.197	2.226	2.257	2.290
0.49	2.326	2.366	2.409	2.457	2.512	2.576	2.652	2.748	2.878	3.090

自由度  $m$  の  $t$  分布の両側  $100\alpha\%$  点

$m$	0.1	0.05	0.02	0.01
1	6.3137	12.706	31.821	63.656
2	2.9200	4.3027	6.9645	9.9250
3	2.3534	3.1824	4.5407	5.8408
4	2.1318	2.7765	3.7469	4.6041
5	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	1.8946	2.3646	2.9979	3.4995
8	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693

## ・連続型確率の計算

次の確率の値を求めよ

- 1) 区間  $[2, 6]$  の一様分布において、区間  $[2.2, 5.3]$  に入る確率。
- 2) パラメータ  $\lambda = \frac{1}{3}$  の指数分布において、区間  $[3, 9]$  に入る確率。
- 3)  $\mu = 0, \sigma^2 = 1$  の標準正規分布  $N(0, 1)$  において、区間  $[-1.68, -0.37]$  に入る確率。

2019年度神奈川工科大学 数理統計学 演習問題	学科	学年	組	学籍番号	氏名	

提出先：K3-3309号室前 20番のボックス 提出期限：10月14日（月）17時頃まで