

1. 離散型・連続型分布の確率計算

・離散型

フィギュアスケートの4回転を成功する確率が $p = \frac{6}{7}$ のとき、次の確率を求めよ。

1) 5回中4回以上成功する確率。(ヒント：4回と5回成功する確率の和)

$n = 5, p = \frac{6}{7}$ の二項分布の確率 $P(X = 4)$ と $P(X = 5)$ の和を求めればよいので

$$P(X = 4) = {}_5C_4 \left(\frac{6}{7}\right)^4 \left(1 - \frac{6}{7}\right)^1 = 5 \times \frac{1296}{2401} \times \frac{1}{7} = \frac{6480}{16807}$$

$$P(X = 5) = {}_5C_5 \left(\frac{6}{7}\right)^5 \left(1 - \frac{6}{7}\right)^0 = 1 \times \frac{7776}{16807} \times 1 = \frac{7776}{16807}$$

であるから、求める確率は

$$\frac{6480}{16807} + \frac{7776}{16807} = \frac{14256}{16807} = 0.84821 \dots = 0.848$$

2) 4回目に初めて失敗する確率。

3個連続して成功の後、4個目に失敗となればよいので

$$\left(\frac{6}{7}\right)^3 \left(1 - \frac{6}{7}\right) = \frac{216}{2401} = 0.089962 \dots = 0.0900$$

・連続型

3) X が確率密度関数 $f(x) = \frac{(x-4)^2}{42}$ ($3 \leq x \leq 9$) の分布に従うとき、

$[3.4, 7.6]$ の間に X が入る確率

$$\begin{aligned} P(3.4 \leq X \leq 7.6) &= \int_{3.4}^{7.6} \frac{(x-4)^2}{42} dx = \int_{-0.6}^{3.6} \frac{u^2}{42} du = \left[\frac{u^3}{126} \right]_{-0.6}^{3.6} \\ &= \frac{46.656 - (-0.216)}{126} = \frac{46.872}{126} = 0.372 \left(= \frac{93}{250} \right) \end{aligned}$$

4) X が平均0, 分散 1^2 の標準正規分布 $N(0, 1^2)$ に従うとき、

$[-0.28, 1.60]$ の間に X が入る確率

$$\begin{aligned} P(-0.28 \leq X \leq 1.60) &= P(-0.28 \leq X \leq 0) + P(0 \leq X \leq 1.60) \\ &= 0.11026 + 0.44520 = 0.55546 = 0.555 \end{aligned}$$

2. 期待値の計算

下記の表のような確率をもつ離散型の確率分布の平均、分散を求めよ。

X	-5	0	3	7
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$

なお、分散の計算は $E[(X - \mu)^2]$ と $E[X^2] - \mu^2$ のどちらを使っても良い。

母平均 μ

$$\begin{aligned} E[X] &= (-5) \times \frac{3}{18} + 0 \times \frac{8}{18} + 3 \times \frac{1}{18} + 7 \times \frac{6}{18} \\ &= \frac{-15 + 0 + 3 + 42}{18} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3} = 1.666\cdots = 1.67 \end{aligned}$$

母分散 μ

$$\begin{aligned} E[(X - \mu)^2] &= \left(-5 - \frac{5}{3}\right)^2 \times \frac{3}{18} + \left(0 - \frac{5}{3}\right)^2 \times \frac{8}{18} + \left(3 - \frac{5}{3}\right)^2 \times \frac{1}{18} + \left(7 - \frac{5}{3}\right)^2 \times \frac{6}{18} \\ &= \frac{400}{9} \times \frac{3}{18} + \frac{25}{9} \times \frac{8}{18} + \frac{16}{9} \times \frac{1}{18} + \frac{256}{9} \times \frac{6}{18} \\ &= \frac{1200 + 200 + 16 + 1536}{162} = \frac{2952}{162} = \frac{164}{9} = 18.222\cdots = 18.2 \end{aligned}$$

もしくは

2次の期待値 $E[X^2]$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= (-5)^2 \times \frac{3}{18} + 0^2 \times \frac{8}{18} + 3^2 \times \frac{1}{18} + 7^2 \times \frac{6}{18} \\ &= \frac{75 + 0 + 9 + 294}{18} = \frac{378}{18} = 21 \end{aligned}$$

から母平均の2乗 μ^2 を引いて

$$\begin{aligned} E[(X - \mu)^2] &= E[X^2] - \mu^2 \\ &= 21 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{189 - 25}{9} = \frac{164}{9} \end{aligned}$$

3. 大標本分布

表の出る確率 $p = \frac{3}{8}$, 試行回数 $n = 3840$ の二項分布に従う確率変数が $[1452, 1511]$ に入る確率 $P(1452 \leq X \leq 1511)$ を正規分布で近似して求めよ。ただし、標準正規分布の確率を計算する場合、変換後の両端の値は小数第3位を四捨五入した値を用いること。

二項分布の母平均 μ と母分散 σ^2 を求めると

$$\mu = np = 3840 \times \frac{3}{8} = 1440$$

$$\sigma^2 = np(1-p) = 3840 \times \frac{3}{8} \times \left(1 - \frac{3}{8}\right) = 900 = 30^2$$

であるから、正規分布 $N(1440, 30^2)$ で近似できる。従って

$$Z = \frac{X - 1440}{30}$$

で変換すれば標準正規分布 $N(0, 1^2)$ になる。

よって

$$\begin{aligned} P(1452 \leq X \leq 1511) &= P\left(\frac{1452 - 1440}{30} \leq Z \leq \frac{1511 - 1440}{30}\right) \\ &= P\left(\frac{2}{5} \leq Z \leq \frac{71}{30}\right) = P(0.40 \leq Z \leq 2.36666\dots) \\ &= P(0.40 \leq Z \leq 2.37) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2.37) - P(0 \leq Z \leq 0.40) \\ &= 0.49111 - 0.15542 = 0.33569 = 0.336 \end{aligned}$$

ちなみに二項分布の確率を精密に計算すると $0.34157\dots$ と近い値であることがわかる。さらに半整数補正を行った場合、区間の幅を ± 0.5 して、正規分布 $N(1440, 30^2)$ において $[1451.5, 1511.5]$ に入る確率を求めさらに近い値を得る。

$$\begin{aligned} P(1451.5 \leq X \leq 1511.5) &= P(0.38333\dots \leq Z \leq 2.38336) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2.38) - P(0 \leq Z \leq 0.38) \\ &= 0.49134 - 0.14803 = 0.34331 = 0.343 \end{aligned}$$

4. 区間推定

次の数値はある工場で作られたねじ山の直径を 6 本の調べた結果である。

$$42.7 \quad 47.2 \quad 45.9 \quad 49.4 \quad 46.2 \quad 46.4 \quad (\text{単位は mm})$$

ねじ山の直径の母集団分布は母分散未知の正規分布であると仮定できるとき、このねじ山の直径の母平均 μ に対する 99% 信頼区間を次の順序に従って求めよ。

(1) 標本平均・標本分散を求める

$$\bar{x} = 46.3, \quad s^2 = 4.712 \quad (s = 2.1707\dots = 2.171)$$

(2) Z もしくは T で変換する (どちらを使うか理由を書くこと)

母分散が未知なので、 T で変換を行い自由度 $6 - 1 = 5$ の t 分布を用いる。

(3) $P(-\varepsilon \leq Z \text{ or } T \leq \varepsilon) = 0.99$ になる ε の値を表から求める

表より $\varepsilon(t_\alpha) = 4.0321$ を用いる。

(4) 信頼区間を求める

$$\begin{aligned} -4.0321 &\leq \frac{46.3 - \mu}{\frac{2.171}{\sqrt{6}}} \leq 4.0321 \\ -4.0321 \times 0.8863 &\leq 46.2 - \mu \leq 4.0321 \times 0.8863 \\ 46.3 - 3.574 &\leq \mu \leq 46.3 + 3.574 \\ 42.726 &\leq \mu \leq 49.874 \\ 42.7 &\leq \mu \leq 49.9 \end{aligned}$$

よって、信頼区間は $[42.7, 49.9]$ である。