

次の確率の値を求めよ

- 1) 表が出る確率を $p = \frac{3}{7}$ としたとき、4回目に初めて表が出る確率。

3回連続裏が出た後、4回目に初めて表が出る確率なので、幾何分布の $P(X = 3)$ を求めればよい

$$P(X = 3) = \left(1 - \frac{3}{7}\right)^3 \times \frac{3}{7} = \frac{64}{343} \times \frac{3}{7} = \frac{192}{2401} = 0.0799666\dots$$

(有効数字3桁の場合 $0.0800 = 8.00 \times 10^{-2}$ と書く)

- 2) 表が出る確率を $p = \frac{1}{4}$ としたとき、4回中3回表が出る確率。

単純に $p = \frac{1}{4}, n = 4, k = 3$ の二項分布の確率 $P(X = 3)$ を求めればよい

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= {}_4C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{4-3} = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^1 \\ &= 4 \times \frac{1}{64} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{64} = 0.046875 \end{aligned}$$

(有効数字3桁の場合 $0.0469 = 4.69 \times 10^{-2}$ と書く)

- 3) 表が出る確率を $p = \frac{2}{3}$ としたとき、5回中3回裏が出る確率。

表の回数に直すと、5回中2回表が出る確率を求めればよいので、 $p = \frac{2}{3}, n = 5, k = 2$ の二項分布の確率 $P(X = 2)$ を求めればよい

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= {}_5C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{5-2} = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\ &= 10 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{27} = \frac{40}{243} = 0.164609\dots \end{aligned}$$

(有効数字3桁の場合 $0.165 = 1.65 \times 10^{-1}$ と書く)

《別解》裏の出る確率のまま、 $p = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, n = 5, k = 3$ の二項分布の確率でも良い。

$$P(X = 3) = {}_5C_3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{5-3} = 10 \times \frac{1}{27} \times \frac{4}{9} = \frac{40}{243}$$

《注意》何人かの学生が解答を「 $1 - (\text{裏が3回出る確率})$ 」としているが、これでは「裏が3回ではない確率」=「表が2回以外になる確率」となる。

確率統計の講義において、確率の値は既約分数（これ以上約分できない分数）または有効数字3桁以上で答えることとする。既約分数でない場合や、有効数字が3桁に満たない場合は1点減点となるので注意。有効数字については別紙を参照のこと。

資料置場

<https://www.gen.kanagawa-it.ac.jp/takeda/class/>

有効数字について

工学の世界では実際に何かを測定した場合、有効数字として記入された桁数までは信頼できる値であることを示しているため、有効数字を正確に取り扱うことは非常に重要である。本来であれば、途中計算の桁数や最終結果の桁の処理方法（いわゆる四捨五入や切捨て等）に関しても色々と細かい計算規則があるが、この授業ではごく一般的に用いられている有効桁数+1桁目を四捨五入したものとする。

1) 有効数字の桁数について

有効数字の定義はいくつかあるが、ここでは簡単に先頭から連続した0を除いて、残った数字の数を有効数字とする。例えば

12.345 → 有効数字5桁

0.123 → 有効数字3桁 ← 左側にある“0.”の部分は有効桁数として数えない

0.0012 → 有効数字2桁 ← 左側にある“0.00”の部分は有効桁数として数えない

のようになる。次に1万や1億などの大きな桁数の数字の場合で有効数字の桁数を本来の桁数よりも小さくする場合は、次のようにする。

1万を有効数字3桁 → 1.00×10^4 “10,000”と書くと有効数字5桁にも見える

7億2千万を有効数字2桁 → 7.2×10^8 “720,000,000”と書くと有効数字9桁にも見える

つまり、 $a.bcd \times 10^n$ の形で書くと有効桁数が分かりやすい。

12.345 → 1.2345×10

0.123 → 1.23×10^{-1}

0.0012 → 1.2×10^{-3}

注意) 1万を有効数字3桁書く場合、右側の「0」には意味があるので、間違っても消してはならない。

2) 演算による有効数字の変化

有効数字を考慮した場合四則演算によって有効数字の桁数が変わる場合があるので注意が必要である。特に有効数字の桁数が違うものの演算を行ったとき、ほとんどの場合において精度の悪いほうに揃う（つまり有効桁数が上がることはない!）。また同じような数の引き算を行うと、有効桁数が低くなるので注意が必要となる。

この授業においては、特に断りがなければ有効数字3桁以上で答えることとする（演算による有効数字の変化については特に厳しく見ない）。有効数字が良く分からない場合は、とりあえず電卓の結果をすべて書き表せば試験では正解とする。ちなみに、有効数字の桁数が足りない場合（注意：電卓の結果が「0.25」の場合の解答は「0.250」となる）、および分数で記入した場合に既約分数（完全に約分されている）で無い場合は減点の対象（基本的には-1点）となるので、注意してください。また、ごく一部の学生が0.2502...を有効数字3桁にして0.250としたあと $\frac{1}{4}$ とさらに分数にしてしまう人がいるが、分数の $\frac{1}{4}$ は本来0.250000...であるから間違いである。

- ・ 確率分布と連続型確率の計算について

分布関数の定義は離散型、連続型を問わず、次のように x 以下になる確率で定義される。

$$F(x) = P(-\infty < X \leq x) \quad \left(F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1 \right)$$

また連続型の場合に確率分布が微分可能であれば、その導関数

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

のことを X の確率密度関数と呼ぶ。このとき、連続型の確率は積分を使って

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

で計算できる。この式から連続型において一点 x になる確率の値は0であることがわかる。さらに、 $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$ である。

- ・ 一様分布と確率計算

一様分布は区間 $[a, b]$ 上において、確率密度関数 $f(x)$ が一定の分布である。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & (a \leq x \leq b) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

確率計算の例

区間 $[0, 2]$ 上の一様分布において X が $[0.400, 1.250]$ に入る確率は、確率密度関数が

$$f(x) = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

であるから、確率の値は積分によって次のように求めることができる。

$$P(0.400 \leq X \leq 1.250) = \int_{0.400}^{1.250} \frac{1}{2} dx = \left[\frac{1}{2}x \right]_{0.400}^{1.250} = \frac{0.850}{2} = \frac{17}{40} = 0.425$$

- ・ 指数分布と確率計算

指数分布は、確率密度関数 $f(x)$ を指数分布を用いて表された分布である。

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (0 < x) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

確率計算の例

$\lambda = 3$ の指数分布において X が $[1.00, 3.00]$ に入る確率は、確率密度関数が

$$f(x) = 3e^{-3x}$$

であるから、確率の値は積分によって次のように求めることができる。

$$\begin{aligned} P(1.00 \leq X \leq 3.00) &= \int_{1.00}^{3.00} 3e^{-3x} dx = \left[-\frac{3}{3}e^{-3x} \right]_{1.00}^{3.00} = (-e^{-9}) - (-e^{-3}) \\ &= e^{-3} - e^{-9} = 0.049663 \dots = 0.0497 = 4.97 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

・正規分布 (パラメータは μ, σ^2)

統計で最も用いられる基本的な分布。身長・体重や誤差の分布などとして使われる。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

また、正規分布は $N(\mu, \sigma^2)$ と書くことが多い。特に $N(0, 1)$ を標準正規分布と呼ぶ。

－正規分布の確率計算－

一般に正規分布の確率密度関数は定積分することができないので、コンピュータや近似値の表を使って計算する。

例 確率変数 X が正規分布 $N(5, 2^2)$ に従うとき、区間 $[2, 6]$ に入る確率

1. 表は標準正規分布の確率の値のみなので、 $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ で変換する。

$$z = \frac{x - 5}{2} \text{ で変換すると区間は } \left[\frac{2-5}{2}, \frac{6-5}{2} \right] = [-1.5, 0.5] \text{ となる。}$$

つまり、正規分布 $N(5, 2^2)$ に従うとき、区間 $[2, 6]$ に入る確率と標準正規分布 $N(0, 1^2)$ に従うとき、区間 $[-1.5, 0.5]$ に入る確率が等しい。

2. 表は $P(0 < z \leq a)$ なので、0からの確率になるように変形する。

$[-1.5, 0.5]$ を0で分割して $[-1.5, 0]$ と $[0, 0.5]$ の2つの確率の和と考える。
また、正規分布は左右対称なので、 $[-1.5, 0]$ と $[0, 1.5]$ の確率は等しい。

3. 表の値を読んで確率の計算をする。

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 6) &= P(-1.5 \leq Z \leq 0.5) \\ &= P(-1.5 \leq Z \leq 0) + P(0 < Z \leq 0.5) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1.5) + P(0 < Z \leq 0.5) \\ &= 0.43319 + 0.19146 = 0.62465 = 0.625 \end{aligned}$$

標準正規分布の確率 $Pr\{0 < z < a\} = p$ $z \rightarrow p$

a	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.00000	.00399	.00798	.01197	.01595	.01994	.02392	.02790	.03188	.03586
0.1	.03983	.04380	.04776	.05172	.05567	.05962	.06356	.06749	.07142	.07535
0.2	.07926	.08317	.08706	.09095	.09483	.09871	.10257	.10642	.11026	.11409
0.3	.11791	.12172	.12552	.12930	.13307	.13683	.14058	.14431	.14803	.15173
0.4	.15542	.15910	.16276	.16640	.17003	.17364	.17724	.18082	.18439	.18793
0.5	.19146	.19497	.19847	.20194	.20540	.20884	.21226	.21566	.21904	.22240
0.6	.22575	.22907	.23237	.23565	.23891	.24215	.24537	.24857	.25175	.25490
0.7	.25804	.26115	.26424	.26730	.27035	.27337	.27637	.27935	.28230	.28524
0.8	.28814	.29103	.29389	.29673	.29955	.30234	.30511	.30785	.31057	.31327
0.9	.31594	.31859	.32121	.32381	.32639	.32894	.33147	.33398	.33646	.33891
1.0	.34134	.34375	.34614	.34849	.35083	.35314	.35543	.35769	.35993	.36214
1.1	.36433	.36650	.36864	.37076	.37286	.37493	.37698	.37900	.38100	.38298
1.2	.38493	.38686	.38877	.39065	.39251	.39435	.39617	.39796	.39973	.40147
1.3	.40320	.40490	.40658	.40824	.40988	.41149	.41308	.41466	.41621	.41774
1.4	.41924	.42073	.42220	.42364	.42507	.42647	.42785	.42922	.43056	.43189
1.5	.43319	.43448	.43574	.43699	.43822	.43943	.44062	.44179	.44295	.44408
1.6	.44520	.44630	.44738	.44845	.44950	.45053	.45154	.45254	.45352	.45449
1.7	.45543	.45637	.45728	.45818	.45907	.45994	.46080	.46164	.46246	.46327
1.8	.46407	.46485	.46562	.46638	.46712	.46784	.46856	.46926	.46995	.47062
1.9	.47128	.47193	.47257	.47320	.47381	.47441	.47500	.47558	.47615	.47670
2.0	.47725	.47778	.47831	.47882	.47932	.47982	.48030	.48077	.48124	.48169
2.1	.48214	.48257	.48300	.48341	.48382	.48422	.48461	.48500	.48537	.48574
2.2	.48610	.48645	.48679	.48713	.48745	.48778	.48809	.48840	.48870	.48899
2.3	.48928	.48956	.48983	.49010	.49036	.49061	.49086	.49111	.49134	.49158
2.4	.49180	.49202	.49224	.49245	.49266	.49286	.49305	.49324	.49343	.49361
2.5	.49379	.49396	.49413	.49430	.49446	.49461	.49477	.49492	.49506	.49520
2.6	.49534	.49547	.49560	.49573	.49585	.49598	.49609	.49621	.49632	.49643
2.7	.49653	.49664	.49674	.49683	.49693	.49702	.49711	.49720	.49728	.49736
2.8	.49744	.49752	.49760	.49767	.49774	.49781	.49788	.49795	.49801	.49807
2.9	.49813	.49819	.49825	.49831	.49836	.49841	.49846	.49851	.49856	.49861

標準正規分布の確率 $Pr\{0 < z < a\} = p$ $p \rightarrow z$

p	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.40	1.282	1.287	1.293	1.299	1.305	1.311	1.317	1.323	1.329	1.335
0.41	1.341	1.347	1.353	1.359	1.366	1.372	1.379	1.385	1.392	1.398
0.42	1.405	1.412	1.419	1.426	1.433	1.440	1.447	1.454	1.461	1.468
0.43	1.476	1.483	1.491	1.499	1.506	1.514	1.522	1.530	1.538	1.546
0.44	1.555	1.563	1.572	1.580	1.589	1.598	1.607	1.616	1.626	1.635
0.45	1.645	1.655	1.665	1.675	1.685	1.695	1.706	1.717	1.728	1.739
0.46	1.751	1.762	1.774	1.787	1.799	1.812	1.825	1.838	1.852	1.866
0.47	1.881	1.896	1.911	1.927	1.943	1.960	1.977	1.995	2.014	2.034
0.48	2.054	2.075	2.097	2.120	2.144	2.170	2.197	2.226	2.257	2.290
0.49	2.326	2.366	2.409	2.457	2.512	2.576	2.652	2.748	2.878	3.090

自由度 m の t 分布の両側 $100\alpha\%$ 点

m	0.1	0.05	0.02	0.01
1	6.3137	12.706	31.821	63.656
2	2.9200	4.3027	6.9645	9.9250
3	2.3534	3.1824	4.5407	5.8408
4	2.1318	2.7765	3.7469	4.6041
5	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	1.8946	2.3646	2.9979	3.4995
8	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693

・連続型確率の計算

次の確率の値を求めよ

- 1) 区間 $[1, 6]$ の一様分布において、区間 $[1.25, 3.75]$ に入る確率。
- 2) パラメータ $\lambda = \frac{1}{2}$ の指数分布において、区間 $[2.00, 8.00]$ に入る確率。
- 3) 標準正規分布 $N(0, 1)$ において、区間 $[-2.28, -0.40]$ に入る確率。

2019年度神奈川工科大学 確率統計 演習問題	学科	学年	組	学 籍 番 号	氏 名	

提出先：K3-3309号室前 17番のボックス 提出期限：10月 9日（水）17時頃まで