確率統計S 前回の解答

2019.12.13 分

ある会社のＡ工場で作られた電球の寿命を調べたら下記の通りであった。

84.3,　89.4,　84.5,　87.3,　89.2,　84.2,　83.8

Ａ工場とは別のＢ工場で作られた電球の寿命の平均が $\mu = 83.7$ であるとき、両工場で作られる電球の寿命に差があるかどうか有意水準５％で検定せよ。

《解答例》

まず、帰無仮説と対立仮説を考える。電球の寿命に差があるかどうかを調べるので

帰無仮説：電球の寿命に差がない　　$\Rightarrow$　$H_0 : \mu = 83.7$
対立仮説：電球の寿命に差がある　　$\Rightarrow$　$H_1 : \mu \neq 83.7$

とすればよい。次に標本平均 $\bar{x}$ と標本分散 s^2 を求めると

$$\bar{x} = 86.1\ ,\quad s^2 = 6.1066\cdots \quad (s = 2.4711\cdots = 2.471)$$

と計算できる。帰無仮説を真とすると、母集団は母平均 $\mu = 83.7$ で母分散が未知の正規分布に従うので、

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{86.1 - 83.7}{\frac{2.471}{\sqrt{7}}} = 2.5697\cdots$$

のように t で変換すると、t は自由度 $7 - 1 = 6$ の t 分布となる。自由度 6 の t 分布の両側５％点の値は表から 2.4469 をなので、

$|t| \leqq 2.4469$ であれば、帰無仮説を棄却できない。
$|t| > 2.4469$ であれば、帰無仮説を棄却する。

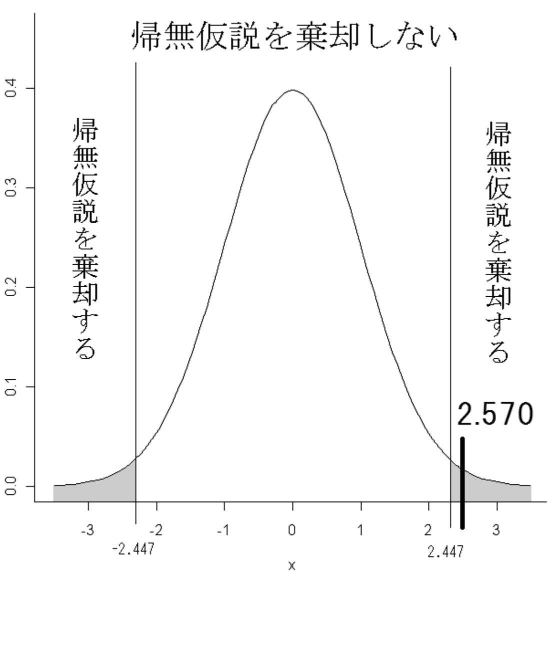
となる。この問題の場合、$|t| = 2.570 > 2.447$ なので、帰無仮説を棄却する。つまり、対立仮説が正しいので、「**２つの工場で作られる電球の寿命には差がある**」といえる。

平均の同等性に関する検定の手順を簡単に述べると下記の通りである。

１）帰無仮説・対立仮説を立てる
２）得られた標本から標本平均 $\bar{x}$、標本分散 s^2 を計算する。
３）母分散が既知ならば z の値を求め、未知であれば t の値を求める
４）棄却点を求めて、z もしくは t の値と比較し判定を行う。
（z もしくは t の値から確率を計算して判定を行う）

自由度 6 の t 分布と棄却域を図にすると左図の通りである。帰無仮説を棄却する場合、対立仮説が正しいと書くよりも、対立仮説の内容を書いた方が良い。

右図のようにグラフの両側に棄却域があるような検定を両側検定とよぶ。



確率統計S　検定問題２　　第１２回

例．燃費の差 (片側検定)

　ガソリンに添加剤を加えた場合、燃費が良くなるかどうかを調べたい。そこで、ガソリンに添加剤を加えた後で走行実験を行った結果、次のようであった。

15.3　13.9　14.7　14.0　15.1　　（単位は km/ℓ）

通常のガソリンでの燃費が 13.5km/ℓ としたとき、添加剤に効果があったかどうか有意水準１％で検定せよ。ただし、燃費の分布は正規分布とみなしてよいとする。

　上記の例題は、前回の平均の同等性（同じかどうか）の検定と異なり、添加剤を加えることによって燃費が良くなった（1ℓ あたりの距離が増える）ことを証明したい。検定の手順は基本的に両側検定と同じであるが、棄却する範囲の作り方が異なるので注意が必要である。

１）仮説を立てる

　この例題では、添加剤によって燃費が良くなるかどうかを調べたいので

　　帰無仮説 H_0：添加剤を加えると燃費は悪くなるか変わらない　$\Rightarrow \mu \leqq 13.5$

　　対立仮説 H_0：添加剤を加えると燃費が良くなる　$\Rightarrow \mu > 13.5$

が２つの仮説となる。

ただし帰無仮説に関しては、実際には $H_0 : \mu = 13.5$ だけあれば十分である。

（$\mu = 13.5$ のとき帰無仮説が棄却されるのであれば、自動的に $\mu < 13.5$ のときも棄却されるので）

２）母集団から標本を抽出する。

　既に無作為抽出で５回分のデータを抽出済み。

３）帰無仮説を真と仮定したときの、標本の出現確率を計算する。

　標本から標本平均 $\bar{x} = 14.6$、標本分散 $s^2 = (0.6325)^2$ である。帰無仮説を仮定した場合、正規分布 $N(13.5, \sigma^2)$ に従う。また母分散 σ^2 に関する情報は無いので、未知として t で変換して確率を求める。実際に t の値を求めると

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{14.6 - 13.5}{\frac{0.6325}{\sqrt{5}}} = 3.8888\cdots$$

であるから、この値が棄却域に入っているかどうかで判断すればよい。

ここまでは帰無仮説・対立仮説に多少の違いはあるものの、手順はほとんど同じである。

一番の違いは、この後の判断の部分にある。

４）３）の出現確率が極めて低いとき、帰無仮説を棄却して対立仮説が正しいと判定する。そうでないときは、判断を保留する。

今回の例題は、母平均が同じかどうかの検定とは異なり、良くなったときだけ帰無仮説を棄却したい。つまり t で変換したとき、0 より明らかに大きな場合だけ棄却すればよいことになる。従って棄却点の決め方は、下のグラフの灰色の部分の確率が有意水準になるように決める。

今回の例題の場合、t は自由度 $5-1=4$ の t 分布に従う。このとき $\Pr\{t_\alpha < T\} = 0.01$ となる t_α の値を求めればよい。ただし、t 分布の表は両側 $100\alpha\%$ 点のものしかないので、次のようにして求める。t 分布のグラフは左右対称であるから

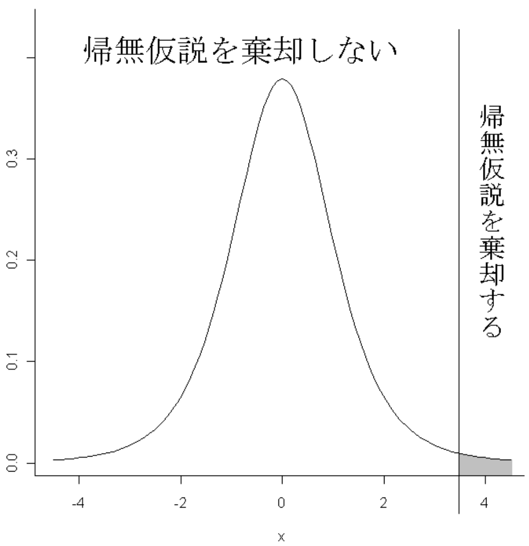
$$\Pr\{T < -t_\alpha, t_\alpha < T\} = 2 \times \Pr\{t_\alpha < T\}$$

となる。つまり、片側で 1%の値を知りたい場合は両側 2%の値を調べればよい。実際に表から値を求めると $t_\alpha = 3.7469$ である。つまり３）で求めた t の値が 3.7469 より大きい場合に、帰無仮説を棄却すればよいことがわかる。

実際に３）で求めた t の値は 3.8888 であるから、$t > 3.7469$ なので、帰無仮説を棄却する。つまり対立仮説が正しいと判定できるので「**燃費が良くなった**」と言える。

もちろんこの例題とは逆に、平均がある値よりも小さいことを調べる場合は、棄却する範囲がある値よりも小さい場合になることになる。このように、平均がある値よりも大きくなった（もしくは小さくなった）かどうかを調べる場合は、帰無仮説を棄却する範囲がグラフの片側のみであることから片側検定と呼ばれる。

片側検定の問題を両側検定と間違えて検定してしまった場合、本来であれば棄却できる範囲が棄却できない範囲となり、「対立仮説が正しいときに帰無仮説を棄却する」と正しく判断する確率（検出力）が低くなってしまうことを意味する。統計学では出来るだけ正しく判断する確率高くしたいので、検定方法を間違えないように十分注意すべきである。



自由度 m の t 分布の両側 $100\alpha\%$ 点

m	0.10	0.05	0.02	0.01
1	6.3137	12.706	31.821	63.656
2	2.9200	4.3027	6.9645	9.9250
3	2.3534	3.1824	4.5407	5.8408
4	2.1318	2.7765	3.7469	4.6041
5	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	1.8946	2.3646	2.9979	3.4995
8	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693

・２標本の平均の差の検定

消費電力が低くなるように電球に改良を加えた結果、改良前後の消費電力は次の通りであった。

改良前 (x)	:	7.3	7.8	7.5	7.7	8.2	8.0	
改良後 (y)	:	7.5	6.9	6.4	7.2	7.1		（単位 W）

消費電力の分布は同じ母分散を持つ正規分布であるとするとき、次の問いに答えよ。

1) 標本平均 $(\bar{x}, \bar{y})$・標本分散 (s_x^2, s_y^2) を求めよ。

$\bar{x} = 7.75,\ s_x^2 = 0.107,\ \bar{y} = 7.02.\ s_y^2 = 0.167$

2) 共通の母分散の推定量 s^2 を求めよ。

$$s^2 = \frac{1}{5+4}(5 \times 0.107 + 4 \times 0.167) = \frac{1.203}{9} = 0.13366 \cdots$$

3) 消費電力が低くなるといえるかどうか有意水準１％で検定せよ。
消費電力が低くなるかどうかなので、帰無仮説と対立仮説は下記のようになる。

帰無仮説：消費電力が高くなるか同じである　H_0: $\mu_x \geqq \mu_y$
対立仮説：消費電力が低くなる　H_1: $\mu_x < \mu_y$

実際の検定のときは H_0: $\mu_x - \mu_y = 0$ v.s. H_1: $\mu_x - \mu_y < 0$ として検定する。

帰無仮説（$\mu_x - \mu_y = 0$）が真のときの統計量の値を求めると下記のとおりである。

$$t = \frac{(7.75 - 7.02) - (0)}{\sqrt{0.1337} \times \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{5}}} = \frac{0.73}{0.2214} = 3.2971 \cdots$$

（精密に計算した場合 $3.2974 \cdots$）

t は自由度 $(6-1) + (5-1) = 9$ の t 分布に従うことを使って判定を行う。

この問題は対立仮説が「＜」の片側検定なので、棄却域はグラフの片側に作る。t が自由度９の t 分布に従うことから、片側１％（＝両側２％）の点を表から求めると 2.8214 である。$|t| = 3.297 > 2.8214$ なので、帰無仮説を棄却する。

つまり、改良後の方が消費電力が下がっていると言える。

注）今回の問題は**「消費電力が低くなる」**なので、対立仮説は $\mu_x < \mu_y$ の片側検定である。
「消費電力に違いがあるかどうか」の検定の場合、両側検定になる。
何を調べているのか問題文から読み取って正しい検定を行うこと。

・両側検定／片側検定と検出力について

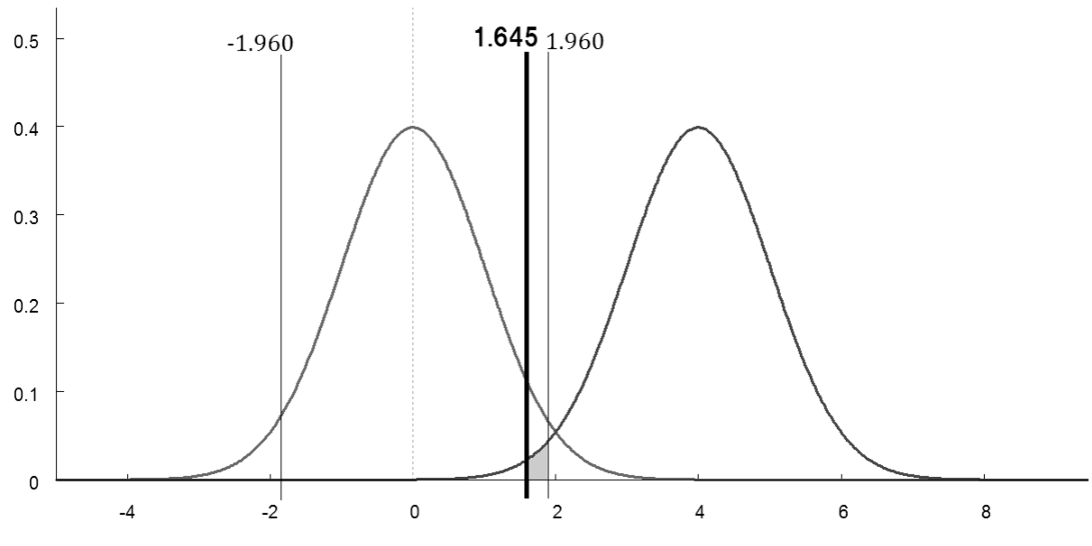
平均に関する検定を行う場合、対立仮説に応じて両側検定（$\mu \neq \mu_0$ の場合）と片側検定（$\mu > \mu_0$
もしくは $\mu < \mu_0$ の場合）を選んで検定を行う必要がある。検定法を間違えて行うと、「有意水準（第１種の過誤の確率）が守られない」や「検出力（１－第２種の確率＝対立仮説が正しいときに帰無仮説を棄却する確率）が低くなる」ことになり、いずれにしても良い検定とは言えない。

・両側検定（$H_1 : \mu \neq \mu_0$）を片側検定（$H_1 : \mu > \mu_0$）と間違えた場合

例えば母分散が既知で有意水準が５％の場合、z の値が $(\infty, -1.960]$ もしくは $[1.960, \infty)$ のとき帰無仮説を棄却し対立仮説が正しいと判定する。しかし間違って片側検定を行った場合、$[1.645, \infty)$ のときに帰無仮説を棄却するため、$[1.645, 1.960)$ の範囲に入ったときに帰無仮説が棄却されない範囲であるが棄却されてしまう（さらに、負の範囲では一切帰無仮説が棄却されない問題が発生する）。本来帰無仮説が棄却されない範囲で帰無仮説を棄却してしまうと、有意水準が保たれていないことになってしまう。

・片側検定（$H_1 : \mu > \mu_0$）を両側検定（$H_1 : \mu \neq \mu_0$）と間違えた場合

例えば母分散が既知で有意水準が５％の場合、z の値が $[1.645, \infty)$ のとき帰無仮説を棄却し対立仮説が正しいと判定する。これを間違って両側検定で行うと $[1.645, 1.960)$ の範囲に入ったときに帰無仮説が棄却される範囲であるが棄却されない。実際に帰無仮説が真（$H_0 : \mu = \mu_0$）と対立仮説が真（$H_1 : \mu = \mu_1 > \mu_0$）の場合の z の分布をグラフにすると下の図のようになる。



片側検定を両側検定で行った場合、灰色の部分の面積分だけ第２種の過誤の確率が上がるため、検出力が下がる（さらに、$(\infty, -1.960]$ の範囲も棄却される範囲となってしまうが、対立仮説 $H_1 : \mu > \mu_0$ が真の場合、上の図からも明らかなように z の値が $(\infty, -1.960]$ になることはほとんどない）。

2019年度 確率統計S　小テスト解答用紙　2019.12.20

・二標本平均の差の区間推定

消費電力が低くなるように電球に改良を加えた結果、改良前後の消費電力は次の通りであった。

改良前 (x)	:	7.3	7.8	7.5	7.7	8.2	8.0
改良後 (y)	:	7.5	6.9	6.4	7.2	7.1	

（単位 W）

消費電力の分布は同じ母分散を持つ正規分布であるとするとき、次の問いに答えよ。

1) 標本平均 $(\bar{x}, \bar{y})$・標本分散 (s_x^2, s_y^2) を求めよ。

2) 共通の母分散の推定量 s^2 を求めよ。

$$s^2 = \frac{1}{(n-1)+(m-1)}\{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2\}$$

3) 消費電力が低くなるといえるかどうか有意水準１％で検定せよ。

2019年度神奈川工科大学 確率統計S 演習問題	学科	学年	組	学　籍　番　号	氏　　　名	

提出先：K3-3309号室前　18番のボックス　　提出期限：１２月２３日（月）１７時頃まで