確率統計S　前回の解答　2019.10.11 分

・連続型の確率計算

次の確率の値を求めよ

1）パラメータ $\lambda = 3$ の指数分布において、区間 $[1,5]$ に入る確率。

指数分布の確率密度関数は $f(x) = 3e^{-3x}$ $(0 \leqq x)$ であるから

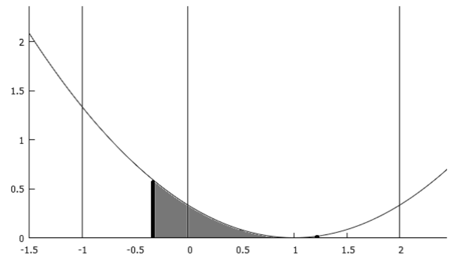
$$P(1 \leqq X \leqq 5) = \int_1^5 3e^{-3x}\,dx = \Big[-e^{-3x}\Big]_1^5 = -e^{-15} - \left(-e^{-3}\right)$$
$$= e^{-3} - e^{-15} = 0.049786\cdots = 0.0498$$

注）解答は $e^{-3} - e^{-15}$ でも 0.0498 でも可

2）確率密度関数が $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{3}$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$ の確率変数 X が、区間 $[-0.3, 1.2]$ に入る確率。

確率密度関数を求める区間で積分すればよいので、

$$P(-0.3 \leqq X \leqq 1.2) = \int_{-0.3}^{1.2} \frac{(x-1)^2}{3}\,dx = \int_{-1.3}^{0.2} \frac{t^2}{3}\,dt = \left[\frac{t^3}{9}\right]_{-1.3}^{0.2}$$



$$= \frac{(0.2)^3}{9} - \frac{(-1.3)^3}{9} = \frac{0.008 - (-2.197)}{9}$$
$$= \frac{2.205}{9} = \frac{49}{200} = 0.245$$

3）標準正規分布 $N(0,1)$ において、区間 $[0.37, 2.13]$ に入る確率。

区間に 0 を含まないので、0 までの部分を足して引けばよい。

$$P(0.37 \leqq X \leqq 2.13) = P(0 \leqq X \leqq 2.13) - P(0 \leqq X < 0.37)$$
$$= 0.48341 - 0.14431 = 0.33910 = 0.339$$

資料置場

https://www.gen.kanagawa-it.ac.jp/takeda/class/

平均と分散の推定（母集団と標本）

高校の数学Aでは、簡単なくじ引きやサイコロ等の離散型分布の期待値の計算を行ってきた。しかしながら、これらの結果はすべて理論的な話であって、現実の世界でこれから起こる事象の確率が事前にわかっていることはほとんど無い（たとえサイコロであっても本当にすべての出る目が等しく $\frac{1}{6}$ であることの保障は無い）。後半の統計学では、実験などによって得られるデータから未知である分布を推定することや、仮説が正しいかどうかを判断すること等を行う。もちろん得られるデータはなんらかの確率分布に従っているため、実験を行うたびに異なるデータが得られる。したがって、データから推定される値も実験ごとに異なる数値になる。統計学は確率論を使って、できるだけ正しい結果になるように推定する方法を考える。

母平均と標本平均・母分散と標本分散

母集団から確率変数 X が一つ取り出されたとき、X の取り得る値として期待される値、いわゆる平均値 μ は $\mu = E[X]$ で定義され、平均値からのバラツキ具合を表す分散 σ^2 は平均からの差の2乗の期待値 $\sigma^2 = E[(X-\mu)^2]$ で定義されている。

平均、分散共に母集団の確率（もしくは確率密度関数）が必要になるので、実際には未知であることが多い。そこで母集団から得られた n 個の標本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を使って、次のように平均 μ，分散 σ^2 を $\bar{x}$ と s^2 を使って推定する。

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

【教科書によっては $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ を使っている】

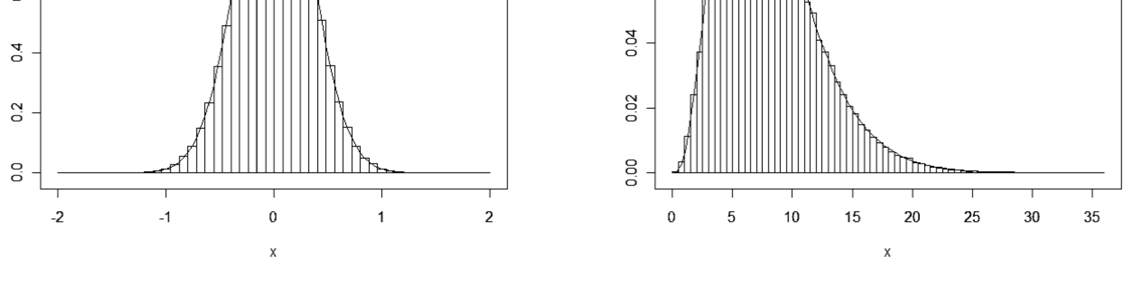
一般に、母集団から計算された平均・分散を母平均 (μ)・母分散 (σ^2) と呼び、標本から計算された平均・分散を標本平均 $(\bar{x})$・標本分散 (s^2) と呼び、記号も区別をしている。また、分散の値の平方根（つまり σ もしくは s）のことを標準偏差と呼ぶ。

標本平均と標本分散の分布

母集団の分布が平均 μ，分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき、n 個の標本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が得られたとき、標本平均と標本分散は次のような分布に従う。

・標本平均 $\bar{x}$ は平均は同じ μ，分散は n で割った $\frac{\sigma^2}{n}$ の正規分布 $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ に従う
・標本分散 s^2 は $\frac{n-1}{\sigma^2}s^2$ で変換すると自由度 $(n-1)$ の χ^2 分布に従う。

例．標準正規分布から標本 $x_1, \cdots, x_9$ を得た場合のヒストグラムと理論分布



2019年度 確率統計S　小テスト解答用紙

2019.10.18

・母平均と母分散

下記の表のような確率をもつ離散型の確率分布の母平均と母分散を求めよ。

X	-4	1	3	11
確率	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$

なお、母分散は $E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - \mu^2$ を用いて計算しても良い。

（裏面にもう１問あります）

2019年度神奈川工科大学 確率統計S 演習問題	学科	学年	組	学　籍　番　号	氏　　　名	

提出先：K3-3309号室前　18番のボックス　　提出期限：１０月１４日（月）１７時頃まで

・標本平均

・実際にコイン投げを１００回行い、１０回・２０回・５０回・１００回までの結果から表の出る確率をそれぞれ推定せよ。解答用紙には１００回分の結果と１０回・２０回・５０回・１００回のときの推定値を書くこと。

（表は「表」を「○」、裏を「×」でかまいません）

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0										
10										
20										
30										
40										
50										
60										
70										
80										
90										

表の出る確率 p の推定値（表を 1, 裏を 0 としたときの平均値）

・　１０回目まで

・　２０回目まで

・　５０回目まで

・１００回目まで

（有効桁数 3 桁の小数で答えること）