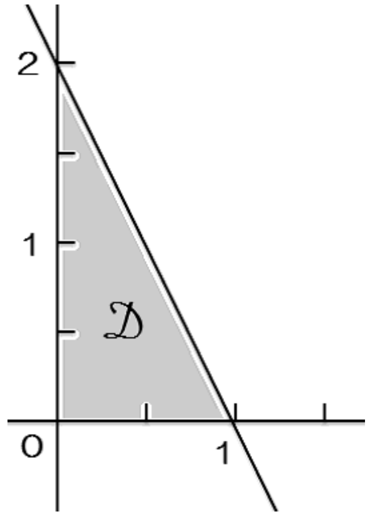
次の重積分の積分領域を図示し、計算せよ。

(1) $$\iint_{\substack{0 \leqq 2x+y \leqq 2 \\ 0 \leqq x \\ 0 \leqq y}} (2x+3y^2)\,dxdy$$



領域を図示すると右図の様な三角形になる。

従って、y の値を固定して x の値を考えると $0 \leqq x \leqq 1 - \frac{y}{2}$ となる。よって積分は

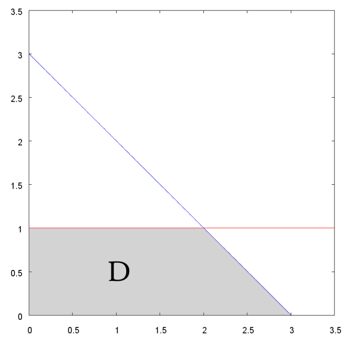
$$\begin{aligned}
\iint_{\substack{0 \leqq 2x+y \leqq 2 \\ 0 \leqq x, 0 \leqq y}} (2x+3y^2)\,dxdy &= \int_0^2 \left\{ \int_0^{1-\frac{y}{2}} (2x+3y^2)\,dx \right\} dy = \int_0^2 \left\{ \left[x^2 + 3xy^2 \right]_{x=0}^{x=1-\frac{y}{2}} \right\} dy \\
&= \int_0^2 \left\{ \left(1 - \frac{y}{2}\right)^2 + 3\left(1 - \frac{y}{2}\right) y^2 \right\} dy = \int_0^2 \left(1 - y + \frac{13}{4}y^2 - \frac{3}{2}y^3 \right) dy \\
&= \left[y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{13}{12}y^3 - \frac{3}{8}y^4 \right]_0^2 = 2 - 2 + \frac{26}{3} - 6 = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

これとは逆に x を固定して y の値を考えると $0 \leqq y \leqq 2 - 2x$ となるので積分は

$$\begin{aligned}
\iint_{\substack{0 \leqq 2x+y \leqq 2 \\ 0 \leqq x, 0 \leqq y}} (2x+3y^2)\,dxdy &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{2-2x} (2x+y^2)\,dy \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \left[2xy + y^3 \right]_{y=0}^{y=2-x} \right\} dx \\
&= \int_0^1 \left\{ 2x(2-2x) + (2-2x)^3 \right\} dx \\
&= \int_0^1 \left(8 - 20x + 20x^2 - 8x^3 \right) dx = \left[8x - 10x^2 + \frac{20}{3}x^3 - 2x^4 \right]_0^1 \\
&= 8 - 10 + \frac{20}{3} - 2 = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

したがって、$x \to y$ の順番に積分しても、$y \to x$ の順番に積分しても結果は $\dfrac{8}{3}$ である。

(2) $\displaystyle \iint_{\substack{0 \leqq x+y \leqq 3 \\ 0 \leqq x \\ 0 \leqq y \leqq 1}} (6x - 3y^2)\, dxdy$



領域を図示すると右図の様な台形になる。従って、y の値を固定して x の範囲を考えた方が良い。

（x を固定すると、y の範囲は場合分けが必要）

実際に $0 \leqq y \leqq 1$ で y を固定して x の動ける範囲を考えると、$0 \leqq x \leqq 3 - y$ となるので、積分は次のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
\iint_{\substack{0 \leqq x+y \leqq 3 \\ 0 \leqq x \\ 0 \leqq y \leqq 1}} (6x - 3y^2)\, dxdy &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{3-y} (6x - 3y^2)\, dx \right\} dy = \int_0^1 \left\{ \left[3x^2 - 3xy^2 \right]_{x=0}^{x=3-y} \right\} dy \\
&= \int_0^1 \left\{ (3(3-y)^2 - 3(3-y)y^2 \right\} dy = \int_0^1 \left(27 - 18y - 6y^2 + 3y^3 \right) dy \\
&= \left[27y - 9y^2 - 2y^3 + \frac{3}{4} y^4 \right]_{y=0}^{y=1} \\
&= 27 - 9 - 2 + \frac{3}{4} = \frac{108 - 36 - 8 + 3}{4} = \frac{67}{4}
\end{aligned}
$$

この計算を逆に行う場合、つまり x を固定して y についての積分を先にすると

$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で $0 \leqq y \leqq 1$、$2 \leqq x \leqq 3$ の範囲で $0 \leqq y \leqq 3 - x$ で 2 つの積分を行う

$$
\begin{aligned}
\iint_{\substack{0 \leqq x+y \leqq 3 \\ 0 \leqq x \\ 0 \leqq y \leqq 1}} (6x - 3y^2)\, dxdy &= \int_0^2 \left\{ \int_0^1 (6x - 3y^2)\, dy \right\} dx + \int_2^3 \left\{ \int_0^{3-x} (6x - 3y^2)\, dy \right\} dx \\
&= \int_0^2 \left\{ \left[6xy - y^3 \right]_{y=0}^{y=1} \right\} dx + \int_2^3 \left\{ \left[6xy - y^3 \right]_{y=0}^{y=3-x} \right\} dx \\
&= \int_0^2 (6x - 1)\, dx + \int_2^3 \left(-27 + 45x - 15x^2 + x^3 \right) dx \\
&= \left[3x^2 - x \right]_{x=0}^{x=2} + \left[-27x + \frac{45}{2} x^2 - 5x^3 + \frac{1}{4} x^4 \right]_{x=2}^{x=3} \\
&= (12 - 2) + \left\{ \left(-81 + \frac{405}{2} - 135 + \frac{81}{4} \right) - (-54 + 90 - 40 + 4) \right\} \\
&= 10 + \frac{27}{4} = \frac{40 + 27}{4} = \frac{67}{4}
\end{aligned}
$$

資料置場

https://www.gen.kanagawa-it.ac.jp/takeda/class/

2019年度 解析学Ⅱ　小テスト解答用紙　2019.12.13

・重積分の置換積分（領域がおうぎ形の場合）

次の重積分の積分領域を図示し、置換積分（極座標変換）を使って計算せよ。

$$\iint_{\substack{0 \leqq x^2+y^2 \leqq 2^2 \\ x \leqq 0 \\ y \leqq 0}} 14xy^4 \, dxdy$$

2019年度神奈川工科大学 解析学 Ⅱ 演習問題	学科	学年	組	学　籍　番　号	氏　　　　　名	

提出先：K3-3309号室前　18番のボックス　　提出期限：１２月１６日（月）１７時頃まで