$x^2+2y^2-6=0$ の条件のもとで、$\dfrac{x^2}{4}-y$ の値の最大値を求めよ。

(1) ラグランジュの未定係数法を用いるために $F(x,y,\lambda)$ を求める

$$F(x,y,\lambda)=\left(\frac{x^2}{4}-y\right)-\lambda\left(x^2+2y^2-6\right)$$

(2) $F_x(x,y,\lambda), F_y(x,y,\lambda)$ を求める。

$$F_x(x,y,\lambda)=\frac{x}{2}-\lambda(2x)\ ,\quad F_y(x,y,\lambda)=-1-\lambda(4y),\quad F_\lambda(x,y,\lambda)=-(x^2+2y^2-6)$$

(3) $F_x(x,y,\lambda)=0, F_y(x,y,\lambda)=0$ を同時に満たす x,y の関係式を求めよ。

$4y\times F_x-2x\times F_y=2xy+2x=2x(y+1)=0$　なので、$x=0$ もしくは $y=-1$

(4) (3) で求めた関係式を元の条件に代入して極値の候補を求めよ

《$x=0$ のとき》　$0^2+2y^2-6=0\ \Rightarrow\ y^2=3$　なので、$y=\pm\sqrt{3}$

《$y=-1$ のとき》　$x^2+2\times(-1)^2-6=0\ \Rightarrow\ x^2=4$　なので、$x=\pm 2$

つまり $(0,\sqrt{3})$, $(0,-\sqrt{3})$, $(2,-1)$, $(-2,-1)$ の 4 点が候補となる。

(5) すべての極値の候補を $\dfrac{x^2}{4}-y$ に代入して最大値および最小値を考えると

《$(0,\sqrt{3})$ のとき》　$\frac{x^2}{4}-y=0-\sqrt{3}=-\sqrt{3}$

《$(0,-\sqrt{3})$ のとき》　$\frac{x^2}{4}-y=0-(-\sqrt{3})=\sqrt{3}$

《$(2,-1)$ のとき》　$\frac{x^2}{4}-y=\frac{2^2}{4}-(-1)=1+1=2$

《$(-2,-1)$ のとき》　$\frac{x^2}{4}-y=\frac{(-2)^2}{4}-(-1)=1+1=2$

なので、最大値は $(\pm 2,-1)$ のとき $\frac{x^2}{4}-y=2$

（ちなみに最小値は $(0,\sqrt{3})$ のとき $\frac{x^2}{4}-y=-\sqrt{3}$）

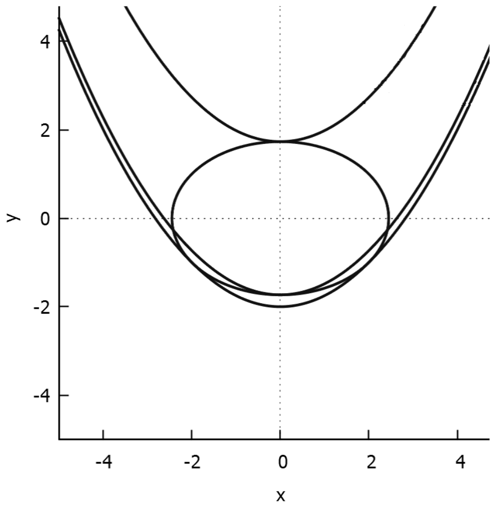

図 1：$x^2+2y^2-6=0$（楕円）のグラフと

$x^2/4-y=2,\ \ x^2/4-y=\pm\sqrt{3}$ のグラフ（２次関数）