

関数 $f(x, y) = 3x^3 + 2xy^2 - 4xy$ の極値を次の設問にしたがって求めよ。

(1) $f_x(x, y), f_y(x, y)$ を求めよ

$$f_x(x, y) = 9x^2 + 2y^2 - 4y, \quad f_y(x, y) = 4xy - 4x$$

(2) $f_x(x, y) = 0, f_y(x, y) = 0$ を同時に満たす x, y を求めよ。

方程式は

$$\begin{cases} 9x^2 + 2y^2 - 4y = 0 & \dots (i) \\ 4xy - 4x = 0 & \dots (ii) \end{cases}$$

なので、(ii) 式より $4x(y - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ または $y = 1$

この結果を (i) に代入すると

$$\langle x = 0 \text{ のとき} \rangle \quad 2y^2 - 4y = 0 \Rightarrow 2y(y - 2) = 0 \Rightarrow y = 0, 2$$

$$\langle y = 1 \text{ のとき} \rangle \quad 9x^2 + 2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{9} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$$

つまり極値をとる点の候補は $(0, 0), (0, 2), \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, 1\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, 1\right)$ の 4 点

(3) $f_{xx}(x, y), f_{yy}(x, y), f_{xy}(x, y)$ を求めよ

$$f_{xx}(x, y) = 18x, \quad f_{yy}(x, y) = 4x, \quad f_{xy} = 4y - 4$$

(4) $\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$ を求める。

$$\Delta(x, y) = 18x \times 4x - (4y - 4)^2 = 72x^2 - (4y - 4)^2$$

(5) $\Delta(x, y)$ と $f_{xx}(x, y)$ を使って極値の判定。

$$\Delta(0, 0) = 0 - 16 = -16 < 0 \text{ なので極値ではない}$$

$$\Delta(0, 2) = 0 - 16 = -16 < 0 \text{ なので極値ではない}$$

$$\Delta\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, 1\right) = 16 - 0 = 16 > 0 \text{ なので極値となる。}$$

$$\text{特に } f_{xx}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, 1\right) = 6\sqrt{2} > 0 \text{ なので極小}$$

$$\Delta\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, 1\right) = 16 - 0 = 16 > 0 \text{ なので極値となる。}$$

$$\text{特に } f_{xx}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, 1\right) = -6\sqrt{2} < 0 \text{ なので極大}$$

以上のことをまとめると

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, 1\right) \text{ のとき } f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, 1\right) = \frac{2\sqrt{2}}{9} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{9} \text{ で極小値を取り、}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, 1\right) \text{ のとき } f\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, 1\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{9} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \text{ で極大値を取る。}$$

資料置場

<https://www.gen.kanagawa-it.ac.jp/takeda/class/>

中間テストについて

中間テストは 11 月 22 日 (金) に行います。

・ 陰関数

$x^2 - 3xy + 5y^2 - 9 = 0$ が定める陰関数において、次の問に答えよ

(1) 点 $\left(3, \frac{9}{5}\right)$ における接線の方程式を求めよ。

(2) 陰関数の極値を取る点の候補を見つけよ。

ヒント) 接線の方程式は分数を含み、極値を取る点の候補は $\sqrt{\quad}$ を含みます。

2019年度神奈川工科大学 解析学Ⅱ 演習問題	学科	学年	組	学 籍 番 号	氏 名	

提出先：K3-3309号室前 18番のボックス 提出期限：11月11日(月)17時頃まで