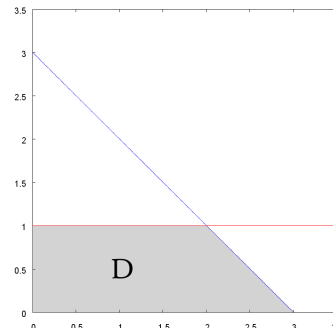


・重積分 $\iint_{\substack{0 \leq x+y \leq 3 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \leq 1}} (3x^2 - 6y) dx dy$ の領域を図示し、計算せよ。

積分範囲は、 $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$ の三点を頂点とする三角形の下側にできる台形なので、 y を固定して x の範囲を考えた方が良い。

(x を固定すると、 y の範囲は場合分けが必要)



実際に $0 \leq y \leq 1$ で y を固定して x の動ける範囲を考えると、 $0 \leq x \leq 3 - y$ となるので、積分は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{0 \leq x+y \leq 3 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \leq 1}} (3x^2 - 6y) dx dy &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{3-y} (3x^2 - 6y) dx \right\} dy = \int_0^1 \left\{ [x^3 - 6xy]_{x=0}^{x=3-y} \right\} dy \\ &= \int_0^1 \{ ((3-y)^3 - 6(3-y)y) \} dy = \int_0^1 (27 - 45y + 15y^2 - y^3) dy \\ &= \left[27y - \frac{45}{2}y^2 + 5y^3 - \frac{1}{4}y^4 \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= 27 - \frac{45}{2} + 5 - \frac{1}{4} = 32 - \frac{91}{4} = \frac{37}{4} \end{aligned}$$

この計算を逆に行う場合、つまり x を固定して y についての積分を先にすると $0 \leq x \leq 2$ の範囲で $0 \leq y \leq 1$ 、 $2 \leq x \leq 3$ の範囲で $0 \leq y \leq 3 - x$ で2つの積分を行う

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{0 \leq x+y \leq 3 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \leq 1}} (3x^2 - 6y) dx dy &= \int_0^2 \left\{ \int_0^1 (3x^2 - 6y) dy \right\} dx + \int_2^3 \left\{ \int_0^{3-x} (3x^2 - 6y) dy \right\} dx \\ &= \int_0^2 \left\{ [3x^2y - 3y^2]_{y=0}^{y=1} \right\} dx + \int_2^3 \left\{ [3x^2y - 3y^2]_{y=0}^{y=3-x} \right\} dx \\ &= \int_0^2 (3x^2 - 3) dx + \int_2^3 (-27 + 18x + 6x^2 - 3x^3) dx \\ &= [x^3 - 3x]_{x=0}^{x=2} + \left[-27x + 9x^2 + 2x^3 - \frac{3}{4}x^4 \right]_{x=2}^{x=3} \\ &= (8 - 6) + \left\{ \left(-81 + 81 + 54 - \frac{243}{4} \right) - (-54 + 36 + 16 - 12) \right\} \\ &= 2 - \frac{27}{4} - (-14) = 16 - \frac{27}{4} = \frac{37}{4} \end{aligned}$$

・重積分の置換積分（領域がおうぎ形の場合）

次の重積分の積分領域を図示し、置換積分（極座標変換）を使って計算せよ。

$$\iint_{\substack{0 \leq x^2 + y^2 \leq 2^2 \\ x \leq 0 \\ y \leq 0}} 12xy^3 \, dx dy$$

2019年度神奈川工科大学 微分積分学Ⅱ－d 演習問題	学科	学年	組	学 籍 番 号	氏 名	

提出先：K3-3309号室前 16番のボックス 提出期限：12月 5日（木）17時頃まで