

関数 $f(x, y) = x^3 - 12xy + 5y^2 - 3x$ の極値を次の設問にしたがって求めよ。

(1) $f_x(x, y), f_y(x, y)$ を求めよ

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 12y - 3, \quad f_y(x, y) = -12x + 10y$$

(2) $f_x(x, y) = 0, f_y(x, y) = 0$ を同時に満たす x, y を求めよ。

方程式は

$$\begin{cases} 3x^2 - 12y - 3 = 0 & \cdots \text{(i)} \\ -12x + 10y = 0 & \cdots \text{(ii)} \end{cases}$$

なので、(ii) 式より $12x = 10y \Rightarrow y = \frac{6}{5}x$

この結果を (i) に代入すると

$$3x^2 - \frac{72}{5}x - 3 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 24x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5, -\frac{1}{5}$$

つまり極値をとる点の候補は $(5, 6), \left(-\frac{1}{5}, -\frac{6}{25}\right)$ の 2 点

(3) $f_{xx}(x, y), f_{yy}(x, y), f_{xy}(x, y)$ を求めよ

$$f_{xx}(x, y) = 6x, \quad f_{yy}(x, y) = 10, \quad f_{xy} = -12$$

(4) $\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$ を求める。

$$\Delta(x, y) = 60x - (-12)^2 = 60x - 144$$

(5) $\Delta(x, y)$ と $f_{xx}(x, y)$ を使って極値の判定。

$$\Delta(5, 6) = 300 - 144 = 156 \text{ なので極値である}$$

$$\text{特に } f_{xx}(5, 6) = 30 > 0 \text{ なので極小}$$

$$\Delta\left(-\frac{1}{5}, -\frac{6}{25}\right) = -12 - 144 = -156 \text{ なので極値ではない}$$

以上のことをまとめると

$(5, 6)$ のとき $f(5, 6) = 125 - 360 + 180 - 15 = -70$ で極小値を取る。

資料置場

<https://www.gen.kanagawa-it.ac.jp/takeda/class/>

・ 極大極小問題 2

関数 $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 9xy$ の極値を次の設問にしたがって求めよ。

- (1) $f_x(x, y), f_y(x, y)$ を求める。
- (2) $f_x(x, y) = 0, f_y(x, y) = 0$ を同時に満たす x, y を求める。
- (3) $f_{xx}(x, y), f_{yy}(x, y), f_{xy}(x, y)$ を求める。
- (4) $\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$ を求める。
- (5) $\Delta(x, y)$ と $f_{xx}(x, y)$ を使って極値の判定。

2019年度神奈川工科大学 微分積分学Ⅱ－d 演習問題	学科	学年	組	学 籍 番 号	氏 名	

提出先：K3-3309号室前 16番のボックス 提出期限：10月24日（木）17時頃まで