

・ 2変数関数のテイラーの定理

関数 $f(x, y) = e^{2x} \sin y$ を3次の項までマクローリン展開せよ。(例題 6.9 を参照にすること)
 また、その結果に $x = 0.1, y = -0.1$ を代入して $e^{0.2} \sin(-0.1) = -0.1219368104489 \dots$
 と比較せよ。

$f(x, y)$ の第3次導関数を求めると下記の通りである。

$$f_x(x, y) = 2e^{2x} \sin y, \quad f_y(x, y) = e^{2x} \cos y$$

$$f_{xx}(x, y) = 4e^{2x} \sin y, \quad f_{xy}(x, y) = 2e^{2x} \cos y, \quad f_{yy}(x, y) = -e^{2x} \sin y$$

$$f_{xxx}(x, y) = 8e^{2x} \sin y, \quad f_{xxy}(x, y) = 4e^{2x} \cos y,$$

$$f_{xyy}(x, y) = -2e^{2x} \sin y, \quad f_{yyy}(x, y) = -e^{2x} \cos y$$

$(x, y) = (0, 0)$ を代入すると

$$f_x(x, y) = 0, \quad f_y(x, y) = 1 \quad f_{xx}(x, y) = 0, \quad f_{xy}(x, y) = 2, \quad f_{yy}(x, y) = 0$$

$$f_{xxx}(x, y) = 0, \quad f_{xxy}(x, y) = 4, \quad f_{xyy}(x, y) = 0, \quad f_{yyy}(x, y) = -1$$

であるから、マクローリン展開は

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 + (0 \times x + 1 \times y) + \frac{1}{2}(0 \times x^2 + 2 \times 2 \times xy + 0 \times y^2) \\ &\quad + \frac{1}{6}(0 \times x^3 + 3 \times 4 \times x^2y + 3 \times 0 \times xy^2 + (-1) \times y^3) + R_4 \\ &= y + 2xy + \frac{1}{6}(12x^2y - y^3) + R_4 = y + 2xy + 2x^2y - \frac{1}{6}y^3 + R_4 \end{aligned}$$

実際に $x = 0.1, y = -0.1$ を代入すると

$$-0.1 - 0.02 + \frac{-0.012 + 0.001}{6} = \frac{-600 - 120 - 11}{6000} = -\frac{731}{6000} = -0.121833333 \dots$$

のように、かなり近い値であることがわかる。この他 $(x, y) = (0, 0)$ に近い値を代入すると

$$(x, y) = (0.1, 0.1) \quad \text{のとき: 真の値 } 0.121936810 \dots \quad \text{近似値 } 0.121833333 \dots$$

$$(x, y) = (0.2, 0.1) \quad \text{のとき: 真の値 } 0.148933956 \dots \quad \text{近似値 } 0.147833333 \dots$$

$$(x, y) = (-0.2, 0.1) \quad \text{のとき: 真の値 } 0.066920340 \dots \quad \text{近似値 } 0.067833333 \dots$$

のように近い値になっている。

資料置場

<https://www.gen.kanagawa-it.ac.jp/takeda/class/>

・ 極大極小問題 1

関数 $f(x, y) = x^3 - 12xy + 5y^2 - 3x$ の極値を次の設問にしたがって求めよ。

- (1) $f_x(x, y), f_y(x, y)$ を求める。
- (2) $f_x(x, y) = 0, f_y(x, y) = 0$ を同時に満たす x, y を求める。
- (3) $f_{xx}(x, y), f_{yy}(x, y), f_{xy}(x, y)$ を求める。
- (4) $\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$ を求める。
- (5) $\Delta(x, y)$ と $f_{xx}(x, y)$ を使って極値の判定。

| 2019年度神奈川工科大学 微分積分学Ⅱ－d 演習問題 | 学科 | 学年 | 組 | 学 籍 番 号 | 氏 名 | |
|-----------------------------------|----|----|---|---------|-----|--|
| | | | | | | |

提出先：K3-3309号室前 16番のボックス 提出期限：10月17日（木）17時頃まで