数理統計学　前回の解答　　第１１回分

新しい電球の消費電力を測定したところ下記のような結果を得た（データは学籍番号を使って下記のように作成すること）。

```
> set.seed(学籍番号)
> x <- round(rnorm(8,23.5,1.23),digits=1)
```

（例．1825200 の場合　23.8, 22.1, 24.8, 24.0, 23.6, 24.7, 22.3, 22.4）

同じ明るさの旧型の電球の消費電力の平均が $\mu = 25.1$ であるとき、新しい電球の消費電力が下がったとしてよいか、有意水準５％で検定せよ。

（ただし、消費電力は正規分布になると仮定する）≪解答例（ 1825200 の場合）≫

（１）帰無仮説と対立仮説を立てる。

新しい電球の消費電力が旧型の平均 $\mu = 25.1$ よりも小さくなることを証明したいので

帰無仮説：新しい電球の消費電力は旧型に比べて高いか同じ　　H_0: $\mu \geqq 25.1$

対立仮説：新しい電球の消費電力は旧型に比べて低い　　H_1: $\mu < 25.1$

（２）標本の抽出　R で 8 個のデータを作成

```
> set.seed(1825200)
> x <- round(rnorm(8,23.5,2.12),digits=1)
> x
 [1] 23.8 22.1 24.8 24.0 23.6 24.7 22.3 22.4
```

（３）帰無仮説が真の場合の（２）で得られた標本の出現確率を求める。

まず、標本平均と標本分散を計算すると

```
> c(mean(x),var(x),sd(x))
 [1] 23.462500  1.154107  1.074294
```

であるから、$\bar{x} = 23.46, s^2 = 1.154, s = 1.074$ である。今回の検定は、消費電力が低くなることを証明するため、帰無仮説 $\mu \geqq 25.1$ は $\mu = 25.1$ のみ考えれば十分である（$\mu = 25.1$ のときに帰無仮説を棄却できれば、25.1 より小さいことが証明できるので）。したがって、母平均を $\mu = 25.1$ とし、母分散が未知なので t で変換すると、

$$t = \frac{23.46 - 25.1}{\frac{1.074}{\sqrt{8}}} = -4.3190\cdots$$

である。また、$\mathrm{P}(T < -4.319)$ の値は自由度 $8 - 1 = 7$ の t 分布に従うので、`pt(-4.319,7)` より $0.0017422\cdots$ である。

（４）判定

この問題は小さいときのみ帰無仮説を棄却する片側検定なので、（３）で求めた値が、５％より小さい場合に帰無仮説を棄却する。実際 $0.00174 < 0.05$ なので、帰無仮説を棄却することができる。つまり、新しい電球の消費電力は旧型に比べて下がったといえる。

ちなみに棄却域を使う場合は、`qt(0.05,7)` の値が -1.895 であることを使い、$t < -1.895$ なので、帰無仮説を棄却することが出来る。

《t.test を使う場合》対立仮説が “<” なので、alternative="less"を使う。

```
> t.test(x,mu=25.1,alternative="less")

        One Sample t-test

data:  x
t = -4.3113, df = 7, p-value = 0.001759
alternative hypothesis: true mean is less than 25.1
                         ⋮
```

のような結果を得る。t.test の場合、p-value の値と有意水準を直接比較すればよいので、帰無仮説を棄却する。つまり、新しい電球の消費電力は旧型に比べて下がったといえる。

結果一覧

学籍番号	$\bar{y}$	s	t	確率	判定
1825200	23.46	1.074	-4.311	0.001759	棄却する
1822007	22.90	1.344	-4.631	0.001198	棄却する
1822008	24.15	1.208	-2.224	0.030766	棄却する
1822015	24.33	1.577	-1.390	0.103601	棄却できない
1822024	23.10	1.634	-3.461	0.005267	棄却する
1822031	23.71	1.299	-3.022	0.009672	棄却する
1822050	23.05	1.043	-5.557	0.000427	棄却する
1822065	23.55	1.065	-4.116	0.002240	棄却する
1822070	23.25	0.7892	-6.630	0.000148	棄却する
1822074	23.61	1.206	-3.487	0.005083	棄却する
1822078	23.60	1.163	-3.650	0.004091	棄却する
1822094	24.11	1.185	-2.357	0.025277	棄却する
1822096	22.76	1.386	-4.772	0.001016	棄却する
1822097	23.33	1.166	-4.306	0.001770	棄却する
1822100	22.69	0.8999	-7.583	0.000064	棄却する

注）1622023 の確率は 8.10×10^{-08} です。

数理統計学 二標本の平均値の差の検定 2017.12.13

推定のときと同じように、二標本の平均の差に関する検定を行うことができる。たとえば、２種類の釘の長さに違いがあるかどうかを調べたいのであれば、

１）仮説を立てる（有意水準１％）

調べることは２種類の釘の長さが「異なるかどうか」であるから、釘Ａの平均を μ_x とし、釘Ｂの平均を μ_y とすれば、２つの仮説は次の通り

帰無仮説 H_0：同じである $(\mu_x = \mu_y \ \Rightarrow \mu_x - \mu_y = 0)$
対立仮説 H_1：異なる $(\mu_x \neq \mu_y \ \Rightarrow \mu_x - \mu_y \neq 0)$

２）母集団から標本を抽出する

それぞれの釘を無作為抽出し釘の長さを１５個調べた。

３）帰無仮説を真と仮定したときの、標本の出現確率を計算する

実際のデータから標本平均、標本分散を計算すると次の通り。

釘Ａ	5.2, 4.9, 4.7, ⋯, 5.8	$\bar{x} = 4.92,\ \ s_x^2 = 0.1617$
釘Ｂ	5.6, 6.1, 6.0, ⋯, 6.8	$\bar{y} = 5.96,\ \ s_y^2 = 0.4040$

共通の母分散の推定値は

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{(n-1)+(m-1)}\left\{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2\right\} \\ &= \frac{1}{14+14}\{14 \times 0.1617 + 14 \times 0.4040\} = 0.28285 \end{aligned}$$

母分散が未知なので、区間推定と同様の変換を使って、

$$t = \frac{(\bar{x}-\bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{s\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}$$

が自由度 $(n-1)+(m-1)$ の t 分布になることを利用する。実際に t の値を求めるには帰無仮説が真であることから $\mu_x - \mu_y = 0$ として

$$t = \frac{(4.92-5.96)-(0)}{\sqrt{0.2829}\sqrt{\frac{1}{15}+\frac{1}{15}}} = -5.355$$

棄却域を求めるのであれば、自由度 28 の t 分布の両側１％点なので

`qt(1-0.01/2,28)`$\Rightarrow$ 2.763262 である。

確率を求めるのであれば、自由度 28 の t 分布における $\Pr\{T < -5.355\}$ の値なので

`pt(-5.355,28)`$\Rightarrow$ 0.000005258 である（約１９万分の１）。

４）判定

棄却域を使う場合は、$|t| > 2.763$ と明らかに棄却域に入るので帰無仮説を棄却する。

確率を使う場合は、０．５％以下か９９．５％以上のとき棄却すればよいので、明らかに棄却する。

いずれの方法でも釘の長さは異なるといえる。

≪ t.test の使い方≫

平均の検定問題で、母分散が未知の場合については t.test という関数を使うと t の値や確率を自動的に計算してくれます。

《1 標本の場合》

t.test(データ, mu = 帰無仮説, alternative = "対立仮説")

《2 標本の場合 ($H_0 : \mu_x = \mu_y$)》

t.test(データ $\mathbf{X}$, データ $\mathbf{Y}$, alternative = "対立仮説" , var.equal = T)

いずれの場合も対立仮説は

two.side…両側検定 $(\mu \neq \mu_0)$　less…片側検定 $(\mu < \mu_0)$　greater…片側検定 $(\mu > \mu_0)$

である。2 標本の場合で等分散が仮定できない場合は、var.equal = F とすればよい。

《教科書の例の場合》

```
> x <- c(5.2,4.9,4.7,4.6,5.0,5.4,4.6,5.0,4.4,4.9,5.4,4.8,4.8,4.3,5.8)
> y <- c(5.6,6.1,6.0,5.9,5.0,5.2,6.6,4.9,6.3,5.7,6.5,5.5,6.9,6.4,6.8)
> c(mean(x),var(x),sd(x))
 [1] 4.9200000 0.1617143 0.4021371
> c(mean(y),var(y),sd(y))
 [1] 5.9600000 0.4040000 0.6356099
> t.test(x,y,alternative="two.side",var.equal = T)

        Two Sample t-test

data:  x and y
t = -5.3553, df = 28, p-value = 1.051e-05
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -1.4378041 -0.6421959
sample estimates:
mean of x mean of y
     4.92      5.96
```

t.test の結果で注目するところは t の値 (t=), 自由度 (df=), 確率 (p-value=) である。特に確率については、直接有意水準の値と比較できるようになっているので、確率の値が有意水準以下であれば、帰無仮説を棄却することができる。

例題の結果は t の値が -5.3553 で、T は自由度 28 の t 分布にしたがっていて、帰無仮説が真の場合このようなデータが得られる確率が $1.051 \times 10^{-5} = 0.00001051$ (約 9 万 5 千分の 1) と、有意水準である 1%より明らかに小さな値なので、帰無仮説を棄却できる。よって、2 種類の釘の長さは異なるといえる。

2019年度 数理統計学 N科　小テスト解答用紙　2019.12.18

・平均に関する仮説検定

X社，Y社の同容量のバッテリーにモーターを繋ぎ、動作時間を調べた。下記の結果から両社のバッテリーに違いがあるかどうか有意水準１％で検定せよ（母分散は共通)。

X社	13.5	15.2	13.4	14.7	13.4	13.2	
Y社							（単位：日）

なお、Y社のデータは下記のプログラムで作成すること。

```
> set.seed(学籍番号)
> y <- round(rnorm(5,11.9,0.876),digits=1)
```

途中式の値を書き、t.test は使わないで解答すること。

2019年度神奈川工科大学 数理統計学 演習問題	学科	学年	組	学　籍　番　号	氏　　　名	

提出先：K3-3309号室前　19番のボックス　提出期限：１２月１９日（木）１７時頃まで

1つ目のデータ y[1] の値の表《確認用》

学籍番号	x[1]	学籍番号	x[1]	学籍番号	x[1]	学籍番号	x[1]
1825200	12.1	1822024	12.0	1822070	11.8	1822096	12.4
1822007	9.9	1822031	13.5	1822074	11.7	1822097	12.4
1822008	12.8	1822050	10.5	1822078	12.1	1822100	11.2
1822015	12.2	1822065	11.7	1822094	13.0		