数理統計学　仮説検定

両側検定と片側検定

平均に関する仮説検定の方法はおおよそ次のとおりである。

1）仮説を立てる。

平均に関する検定を行う場合、調べることは平均がある値 α と「同じかどうか」もしくは「それよりも大きい（小さい）」である。もし「同じかどうか」であれば、

帰無仮説 H_0:同じである $(\mu = \mu_0)$
対立仮説 H_1:異なる　　$(\mu \neq \mu_0)$

を仮説とし、「それよりも大きい（小さい）」であれば

帰無仮説 H_0:同じか小さい $(\mu \leqq \mu_0)$　《もしくは同じか大きい $(\mu \geqq \mu_0)$》
対立仮説 H_1:大きい　　$(\mu > \mu_0)$　《もしくは小さい　$(\mu < \mu_0)$》

を仮説とすればよい。つまり前回の解答は「（添加後の燃費）－（添加前の燃費）」なので

帰無仮説 H_0:燃費は同じか悪くなった $(\mu \leqq 0)$　《実際には燃費は同じでも可 $(\mu = 0)$》
対立仮説 H_1:燃費は良くなった　　$(\mu > 0)$

2）母集団から標本を抽出する。

基本は無作為抽出でよいが、調べたい事柄によっては層別抽出などを用いる。

3）帰無仮説を真と仮定したときの、標本の出現確率を計算する。

実際には標本平均 $\bar{x}$ が α に近いかどうかで判断するために、確率を用いてその基準（棄却域）を作る。母分散が既知か未知かによって、

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \text{もしくは} \quad T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

で変換して、両側検定の場合（対立仮説が $\neq$ のとき）

$$\Pr\{|\,Z \text{ or } \ T\,| > \varepsilon\} = \alpha \ (\text{有意水準})$$

となる ε を求め、片側検定の場合（対立仮説が $<, >$ のとき）

$\Pr\{(\,Z \text{ or } \ T\,) > \varepsilon\} = \alpha$ (有意水準)　（対立仮説が $\mu > \mu_0$ のとき）
$\Pr\{(\,Z \text{ or } \ T\,) < \varepsilon\} = \alpha$ (有意水準)　（対立仮説が $\mu < \mu_0$ のとき）

となる ε を求める。もしくはコンピュータ等で直接次の確率を計算する

$\Pr\{|(\,Z \text{ or } \ T\,)| > (z \text{ or } t)\}$ (両側検定の場合)　（対立仮説が $\mu = \mu_0$ のとき）
$\Pr\{(\,Z \text{ or } \ T\,) < (z \text{ or } t)\}$　(片側検定の場合)　（対立仮説が $\mu < \mu_0$ のとき）

4）3）の出現確率が極めて低いとき、帰無仮説を棄却して対立仮説が正しいと判定する。
そうでないときは、判断を保留する。
つまり、下記の図の灰色部分に入ったとき、帰無仮説を棄却すればよい。

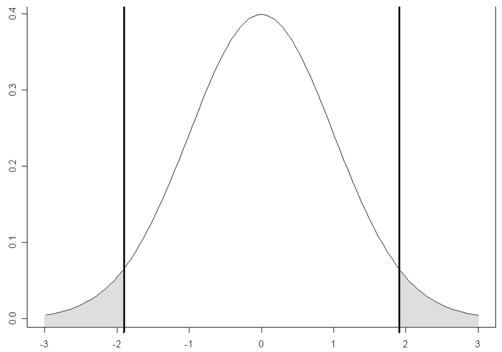

図１．両側検定（対立仮説が $\mu \neq \mu_0$ のとき）

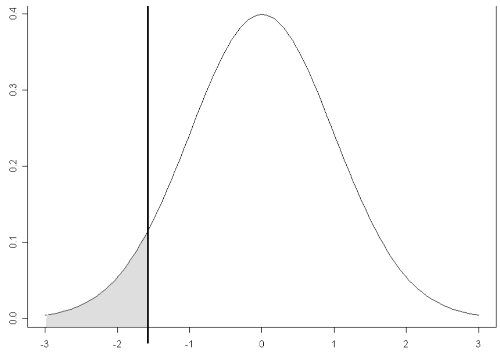

図２．片側検定（対立仮説が $\mu < \mu_0$ のとき）

これを R を使って検定するのであれば次のようになる

１）仮説を立てる。

２）母集団から標本を抽出する。

どちらも同じ

３）帰無仮説を真と仮定したときの、標本の出現確率を計算する。

a) R で棄却点を `qnorm(1-`α`/2)` や `qt(1-`α`/2,` 自由度`)` を求める

例．母分散既知の場合

両側検定で有意水準５％のとき	`qnorm(1-0.05/2)`	$\Rightarrow$ 1.959964
片側検定（$\mu > \mu_0$）で有意水準１％のとき	`qnorm(1-0.01)`	$\Rightarrow$ 2.326348
片側検定（$\mu < \mu_0$）で有意水準５％のとき	`qnorm(0.05)`	$\Rightarrow -1.644854$

母分散未知の場合（自由度は７のとき）

両側検定で有意水準１％のとき	`qt(1-0.01/2,7)`	$\Rightarrow$ 3.499483
片側検定（$\mu > \mu_0$）で有意水準５％のとき	`qt(1-0.05,7)`	$\Rightarrow$ 1.894579
片側検定（$\mu < \mu_0$）で有意水準１％のとき	`qt(0.01,7)`	$\Rightarrow -2.997952$

b) 直接標本の出現確率（p 値）を R で計算する。

母分散既知の場合　`pnorm(`$\bar{x}, \mu_0, \sigma$`)` を計算するか、

$z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ の値を計算して `pnorm(`z`)` を計算する（どちらも同じ値）。

母分散未知の場合

$t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ の値を計算して `pt(`t`,` 自由度`)` を計算する。

このように `pnorm` や `pt` で出てきた値は z もしくは t 以下になる確率で p 値と呼ばれる。

４）３）の出現確率が極めて低いとき、帰無仮説を棄却して対立仮説が正しいと判定する。
そうでないときは、判断を保留する。

a) の値を使う場合：計算した z, t の値と求めた ε を比較して判定する。

b) の値を使う場合：

両側検定…両側で有意水準以下になる確率（たとえば有意水準５％であれば、２．５％以下か９７．５％以上）であれば帰無仮説を棄却する。

片側検定…片側で有意水準以下（有意水準５％で「大きい」を検定する場合は９５％以上、「小さい」を検定する場合は５％以下）で帰無仮説を棄却する。

R で t 分布を使った検定（t 検定）は関数 `t.test` が存在するので、それを使用すれば簡単に検定を行うことができる。

`t.test` の簡単な説明

`x` にデータが入力されているとき、帰無仮説の母平均 μ と対立仮説 `alternative` として適切なものを選ぶ

`t.test(x,mu=`μ` ,alternative="two.side, less, greater")`

`two.side`…両側検定 ($\mu \neq \mu_0$)　`less`…片側検定 ($\mu < \mu_0$)　`greater`…片側検定 ($\mu > \mu_0$)

いずれの検定においても `p-value` の値が有意水準以下のとき、帰無仮説を棄却する。

例．人種による身長の差 (両側検定)

オーストラリア人の新生児１０人を無作為に抽出し、その身長を測定したところ次のようであった。

51.0　45.9　48.8　54.0　53.5　48.0　44.5　46.0　50.3　48.0

日本人の新生児の平均身長が 50.2cm であったとしたとき、日本人とオーストラリア人の新生児の平均身長が異なるかどうかを調べる。ただし、身長の分布は正規分布とみなしてよいとする。

１）仮説を立てる

帰無仮説 H_0：平均身長に差は無い　$\mu = 50.2$

対立仮説 H_1：平均身長に差がある　$\mu \neq 50.2$

２）母集団から標本を抽出する。

既に無作為抽出されているので省略。

３）帰無仮説を真と仮定したときの、標本の出現確率を計算する。

a) 自由度１０－１＝９の t 分布の両側５％点は $\varepsilon = 2.262157$　（⇐`qt(1-0.05/2,9)`）

b) 母分散が未知なので、$t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ の値を求めると

$$t = \frac{49.0 - 50.2}{\frac{3.194}{\sqrt{10}}} = -1.18808$$

このとき、t は自由度 $10 - 1 = 9$ の t 分布に従うので、t 以下になる確率は

`pt(-1.18808,9)`$= 0.1326039$

４）３）の出現確率が極めて低いとき、帰無仮説を棄却して対立仮説が正しいと判定する。そうでないときは、判断を保留する。

a) $|t| < 2.262$ なので、帰無仮説を棄却することができない。

b) ３）で得られた確率が 0.1326039 つまり約１３．３％と小さくも大きくもない値なので、帰無仮説を棄却することができない。

つまり帰無仮説を棄却することができないので、判断を保留する。

・`t.test` を使った場合

```
> x <- c(51.0,45.9,48.8,54.0,53.5,48.0,44.5,46.0,50.3,48.0)
> t.test(x,mu=50.2,alternative="two.side")
        One Sample t-test
data:  x
t = -1.1879, df = 9, p-value = 0.2653
alternative hypothesis: true mean is not equal to 50.2
95 percent confidence interval:
 46.71484 51.28516
sample estimates:
mean of x
       49
```

のように $t = -1.1879,\ \Pr\{|T| > 1.1879\} = 0.2653\ (\Pr\{T < -1.1879\} = 0.1326)$ となるので、有意水準５％よりも大きな p 値であるから、棄却できないことがわかる。つまり判断を保留する。

2019年度 数理統計学 D科　小テスト解答用紙　2019.12. 6

・平均に関する仮説検定

男性の上左側第 1 大臼歯の長さの平均は、これまでの多数の標本の計測により $\mu = 19.6$mm であることがわかっている。同じ位置の女性の臼歯について測定したところ下記のような結果を得た（データは学籍番号を使って下記のように作成すること）。

```
> set.seed(学籍番号)
> y <- round(rnorm(10,18.4,1.2),digits=1)
```

（例．1825200 の場合　18.7　17.0　19.7　18.9　18.5　19.6　17.3　17.4　17.8　19.3）

このとき、女性の臼歯の長さは男性の長さと異なるかどうか、有意水準５％で検定せよ。

（ただし、臼歯の長さは母分散未知の正規分布になると仮定する）

2019 年度神奈川工科大学 数理統計学 演習問題	学科	学年	組	学　籍　番　号	氏　　　名	

提出先：K3-3309 号室前　20 番のボックス　提出期限：１２月　９日（月）１７時頃まで

1つ目のデータ y[1] の値の表《確認用》

学籍番号	y[1]	学籍番号	y[1]	学籍番号	y[1]	学籍番号	y[1]
1825200	18.7	1823038	19.8	1823070	16.6	1823100	17.9
1523051	19.1	1823058	17.5	1823072	20.9	1823102	18.1
1723016	17.3	1823067	19.3	1823076	18.8	1823109	20.4
1823019	19.4	1823068	19.4	1823091	18.8	1823131	20.8