確率統計 前回の解答

2019.11.26 分

・二標本平均の差の区間推定

消費電力が低くなるように電球に改良を加えた結果、改良前後の消費電力は次の通りであった。

改良前 (x)	:	8.5	8.7	8.4	8.5	9.3	9.1	
改良後 (y)	:	7.4	6.8	6.3	7.1	6.9		（単位 W）

消費電力の分布は同じ母分散を持つ正規分布であるとするとき、次の問いに答えよ。

1) 標本平均 $(\bar{x}, \bar{y})$・標本分散 (s_x^2, s_y^2) を求めよ。

$\bar{x} = 8.75,\ s_x^2 = 0.135\ (s_x = 0.36742\cdots)$
$\bar{y} = 6.90,\ s_y^2 = 0.165\ (s_y = 0.40620\cdots)$

2) 共通の母分散の推定量 s^2 を求めよ。

$$s^2 = \frac{1}{(6-1)+(5-1)}\left\{(6-1)s_x^2 + (5-1)s_y^2\right\} = \frac{1.335}{9} = 0.14833\cdots$$

$$s = \sqrt{0.1483} = 0.385097\cdots$$

注）テストの際の解答としては有効桁数 3 桁の $s^2 = 0.148$ で問題ないが、区間推定を計算するときは 4 桁（$\sqrt{0.1483}$ or 0.3851）にすること。

3) 改良前後の平均値の差 $\mu_x - \mu_y$ の９９％信頼区間を求めよ。

$T = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_x-\mu_y)}{s\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}$ で変換すると自由度 $(6-1)+(5-1) = 9$ の t 分布に従うので、
$P(-t_\alpha \leqq T \leqq t_\alpha) = 0.99 = 1 - 0.01$ となる t_α は表より 3.250 であるから区間推定は

$$-3.250 \leqq \frac{(8.75-6.90)-(\mu_x-\mu_y)}{0.3851\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{5}}} \leqq 3.250$$

$$-3.250 \leqq \frac{1.85-(\mu_x-\mu_y)}{0.2332} \leqq 3.250$$

$$1.85 - 3.250\times 0.2332 \leqq \mu_x - \mu_y \leqq 1.85 + 3.250\times 0.2332$$

$$1.0921 \leqq \mu_x - \mu_y \leqq 2.6079$$

$$1.09 \leqq \mu_x - \mu_y \leqq 2.61$$

確率統計　検定問題

１．仮説検定とは

今までは、母集団の母平均や母分散等を標本から推定することを行ってきたが、仮説検定は、事前に立てた母集団に対する性質の仮定が正しいかどうかを判定する一つの方法である。もちろん推定と同様に、母集団にあるすべてのデータを調べることができれば正しい性質も分かるが、実際には一部のデータ（標本）しか得ることができないので、標本から判断せざるを得ない。しかしながら、すべてのデータが手に入らないということは、正しい判定ができないことを意味しており、仮説検定は確率を用いて、なるべく誤った判定を少なくする方法を用いている。

実際の仮説検定の方法はおおよそ次のとおりである。

１）仮説を立てる。

調べたいことに対して、２つの仮説を立てる。帰無仮説 (H_0) と対立仮説 (H_1) と呼ばれており、示したい（証明したい）仮説を対立仮説としておき、対立仮説を否定したものを帰無仮説としておく。

２）母集団から標本を抽出する。

基本的は無作為抽出でよいが、調べたい事柄によっては層別抽出などを用いる。

３）帰無仮説を真と仮定したときの、標本の出現確率を計算する。

仮説検定は背理法の考え方を用いているので、正しくないと思われる仮説を真として、標本の出現確率を調べる。

４）３）の出現確率が極めて低いとき、帰無仮説を棄却して対立仮説が正しいと判定する。そうでないときは、判断を保留する。

３）の出現確率が低い場合、めったに起こらないことが起きたと考えるより、最初の仮説が間違っていたと考えたほうが妥当である。そこで、帰無仮説が否定されるので、対立仮説が正しいと判断できる。しかし、棄却できない場合、どちらが正しいかという積極的な理由が無いため、判断を保留する（背理法と同じ）。

最初にも述べたように、仮説検定では確率で帰無仮説を棄却するかどうかを判断しているために、判断を誤る可能性がある。どのようなケースがあるかを考えると次のような表になる。

	帰無仮説を棄却しない	帰無仮説を棄却する
帰無仮説が真	正しい判定	誤った判定 (第１種の過誤)
対立仮説が真	誤った判定 (第２種の過誤)	正しい判定

できれば第１種の過誤の確率と第２種の過誤の確率をできるだけ小さくしたいが、両方の確率を制御することは非常に困難である。仮説検定では、４）の帰無仮説を棄却する確率が第１種の過誤の確率と一致するので、第１種の過誤の確率を固定（通常は５％もしくは１％）した上で第２種の過誤の確率が小さくなるような方法を用いる。

例．人種による身長の差 (両側検定)

オーストラリア人の新生児１０人を無作為に抽出し、その身長を測定したところ次のようであった。

51.0　45.9　48.8　54.0　53.5　48.0　44.5　46.0　50.3　48.0

日本人の新生児の平均身長が 50.2cm であったとしたとき、日本人とオーストラリア人の新生児の平均身長が異なるかどうかを調べる。ただし、身長の分布は正規分布とみなしてよいとする。

これを前ページの順番に沿って考えると。

１）仮説を立てる

この問題では、日本人とオーストラリア人の新生児の平均身長に差があるかとどうかを調べている。一般的にこのような問題では差がある方に興味があることが多いので、帰無仮説と対立仮説は次のようになる。

帰無仮説 H_0：平均身長に差は無い

対立仮説 H_1：平均身長に差がある

このように仮説をおけば、帰無仮説か対立仮説のいずれかが正しいことになる。つまり帰無仮説が棄却された場合、対立仮説が正しいと判断できる。これを数式で表すと、オーストラリア人の新生児の平均身長を μ として

帰無仮説 H_0：$\mu = 50.2$

対立仮説 H_1：$\mu \neq 50.2$

となる。

２）母集団から標本を抽出する。

既に無作為抽出されているので省略。

本来であれば、仮説を立ててから標本を抽出するのが本筋であるが、無作為抽出の場合、仮説が抽出に与える影響がないので、特に順番が入れ替わっても問題は無い。しかし、仮説によっては層別抽出などの必要性が生じることがあるため、仮説を立ててから標本を抽出するのが正しい。

３）帰無仮説を真と仮定したときの、標本の出現確率を計算する。

帰無仮説を真と仮定するので、オーストラリア人の身長は正規分布 $N(50.2, \sigma^2)$ に従っていると仮定する。その仮定の下で、上記１０人の身長どの程度の確率で出現するかを計算する必要があるが、標本ごとに個別に確率を計算するのではなく、１０人まとめて平均値 $\bar{x}$ の出現確率を用いて判断することになる。つまり、標本平均の値 $\bar{x} = 49.0$ の出現確率が問題となる。推定のところでも出てきたように、標本平均の分布は元の分布と母平均が等しく、母分散を標本数で割った値になることが分かっているので、この場合 $\bar{x}$ は $N(50.2, \frac{\sigma^2}{10})$ に従うときの、$P(\bar{X} \leqq 49.0)$ の確率を求めればよい。

４）３）の出現確率が極めて低いとき、帰無仮説を棄却して対立仮説が正しいと判定する。そうでないときは、判断を保留する。

３）で求めた出現確率が極めて低いとあるが、その境はどこにあるのであろうか。この答えは「問題によって異なる」としか答えようが無い。一般的には５％（２０回に１回）もしくは１％（１００回に１回）程度の出現確率のときに、極めて低い確率と見るが、人の命がかかっている場合等は０．１％（千回に１回）や０．０１％(一万回に１回)の出現確率でやっと極めて低いとみなす場合がある。確率は０でない限り、起こる可能性がある。またこの値は、実際に帰無仮説が真の場合に帰無仮説を棄却する第１種の過誤の確率と等しくなる。この確率の値は事前に有意水準と呼ばれる値で決めておき、出現確率が有意水準以下の確率になったとき、帰無仮説を棄却する。

今回の例では特に有意水準の指定は無いが、ここでは有意水準５％として話を進める。３）の最後に記載したように $P(\bar{X} \leqq 49.0)$ の確率を求めることが可能であれば、その値と有意水準を比べて帰無仮説を棄却するかどうか判断すればよい。しかしながら今回の例の場合のように、母分散が未知の場合は t 分布を使うことになるので、一般的に仮説検定では次のような形で、帰無仮説を棄却するかどうか判断する。

a) $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ もしくは $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ で変換する。推定問題と異なり、検定の場合すべての変数 $\bar{x}, \mu, \sigma^2(\text{ or } s^2), n$ の値がわかっているので、実際に値が求まる。

b) 有意水準を α としたとき、
z であれば標準正規分布における $P(z \leqq -z_\alpha$ もしくは $z_\alpha \leqq z) = \alpha$
t であれば自由度 $n-1$ の t 分布における $P(t \leqq -t_\alpha$ もしくは $t_\alpha \leqq t) = \alpha$
となる t_α の値を求める。

c) $|z|$ もしくは $|t|$ の値と t_α の値を比較して
$|z| > z_\alpha$ もしくは $|t| > t_\alpha$ であれば、帰無仮説を棄却して、
$|z| \leq z_\alpha$ もしくは $|t| \leq t_\alpha$ であれば判断を保留する。

実際に計算をしてみると、母分散が未知なので、標本分散 $s^2 = (3.194)^2$ を用いて変換すると t の値は

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{49.0 - 50.2}{\frac{3.194}{\sqrt{10}}} = -1.18808$$

となる。この t は自由度 $10 - 1 = 9$ の t 分布に従うので、$P(t \leqq -t_\alpha$ もしくは $t_\alpha \leqq t) = 0.05$ となる t_α の値は 2.262 である。よって、$|t|$ が 2.262 よりも大きいときは標本の出現確率が５％以下になるために、帰無仮説を棄却するが、この例の場合は $|t| \leq 2.262$ なので帰無仮説を棄却することができない。つまり判断を保留する。

この例の場合、棄却する箇所が分布の両側にあるので、両側検定と呼ばれる。両側検定は基本的に $H_0 : \mu = \mu_0$ と $H_1 : \mu \neq \mu_0$ のように、単純に異なるかどうかを検定したい場合に用いられる。

2019年度 確率統計　小テスト解答用紙　2019.12. 3

・帰無仮説と対立仮説　《仮説検定》

　ガソリンに添加剤を加えた場合に燃費が良くなるかどうかを検定する場合、データとして

「（添加後の燃費）－（添加前の燃費）」　《単位は km/ℓ 》

が得られたときの帰無仮説および対立仮説を示せ。

2019年度神奈川工科大学 確率統計 演習問題	学科	学年	組	学　籍　番　号	氏　　　名	

提出先：K3-3309号室前　17番のボックス　提出期限：１２月　４日（水）１７時頃まで