

・ 母分散が未知の場合の区間推定

母集団が母分散未知の正規分布に従うとき、7つのデータ

$$72.3, 77.9, 67.3, 73.9, 65.0, 70.1, 79.6$$

が与えられたときの母平均 μ の 95%信頼区間を次の通り求めよ。

(1) 関数電卓を使い標本平均 \bar{x} , 標本分散 s^2 , 標本標準偏差 s を求めよ。

$$\bar{x} = \frac{72.3 + 77.9 + 67.3 + 73.9 + 65.0 + 70.1 + 79.6}{7} = \frac{506.1}{7} = 72.3$$

$$s^2 = \frac{1}{7-1} (36761.37 - 7 \times 72.3^2) = \frac{170.34}{6} = 28.39, \quad s = 5.32822 \dots$$

(2) t 分布の表を用いて母分散が未知の場合の 95%信頼区間を求めよ。

母分散が未知なので T を使って変換すると

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

は自由度 $n - 1$ の t 分布に従うので、 $P(-t_\alpha \leq T \leq t_\alpha) = 0.95 = 1 - 0.05$ となる t_α は 2.4469 である。つまり信頼区間は

$$-2.4469 \leq \frac{72.3 - \mu}{\frac{5.328}{\sqrt{7}}} \leq 2.4469$$

を満たせばよいので、この不等式を μ について解くと、

$$-2.4469 \times \frac{5.328}{\sqrt{7}} \leq 72.3 - \mu \leq 2.4469 \times \frac{5.328}{\sqrt{7}}$$

$$72.3 - 2.4469 \times \frac{5.328}{\sqrt{7}} \leq \mu \leq 72.3 + 2.4469 \times \frac{5.328}{\sqrt{7}}$$

$$72.3 - 4.9275 \dots \leq \mu \leq 72.3 + 4.9275 \dots$$

$$67.3724 \dots \leq \mu \leq 77.2275 \dots$$

となる。したがって、有効数字 3 桁で答えると $67.4 \leq \mu \leq 77.2$ または $[67.4, 77.2]$ となる。

ちなみに 99%信頼区間は $\varepsilon = 3.7074$ を使って $64.8 \leq \mu \leq 79.8$ となります。

注) 途中計算は有効数字より 1 ~ 2 桁多めに計算した方がよい。

資料置場

<https://www.gen.kanagawa-it.ac.jp/takeda/class/>