確率統計 前回の解答

2019.11. 5 分

・母分散が既知の場合の区間推定

母集団が母分散 $\sigma^2 = 5.00^2$ の正規分布に従うとき、7 つのデータ

52.3, 55.9, 64.6, 53.9, 61.2, 51.5, 59.6

が与えられたときの母平均 μ の 99%信頼区間を次の通り求めよ。

(1) 関数電卓を使い標本平均 $\bar{x}$, 標本分散 s^2, 標本標準偏差 s を求めよ。

標本平均 $\bar{x}$ と標本分散 s^2 を求めると、

$$\bar{x} = \frac{52.3 + 55.9 + 64.6 + 53.9 + 61.2 + 51.5 + 59.6}{7} = \frac{399.0}{7} = 57.0$$

$$s^2 = \frac{1}{7-1}\left(22888.32 - 7 \times 57.0^2\right) = \frac{145.32}{6} = 24.22 \ (= 24.2)$$

$$s = 4.9213\cdots \ (= 4.92)$$

解答は有効数字 3 桁以上なので、$\boldsymbol{\bar{x} = 57}$ の場合、2 桁になるため減点対象になります

(2) t 分布の表を用いて母分散が未知の場合の 99%信頼区間を求めよ。

母分散が $\sigma^2 = (5.00)^2$ と既知なので $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ を使って変換すると Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うので、$P(-z_\alpha < Z < z_\alpha) = 0.99 = 1 - 0.01$ となる z_α は 2.576 である。

つまり信頼区間は

$$-2.576 \leqq \frac{57.0 - \mu}{\frac{5.00}{\sqrt{7}}} \leqq 2.576$$

を満たせばよいので、この不等式を μ について解くと、

$$-2.576 \times \frac{5.00}{\sqrt{7}} \leqq 57.0 - \mu \leqq 2.576 \times \frac{5.00}{\sqrt{7}}$$

$$57.0 - 2.576 \times \frac{5.00}{\sqrt{7}} \leqq \mu \leqq 57.0 + 2.576 \times \frac{5.00}{\sqrt{7}}$$

$$57.0 - 4.86818\cdots \leqq \mu \leqq 57.0 + 4.86818\cdots$$

$$52.13182\cdots \leqq \mu \leqq 61.86818\cdots$$

となる。したがって、有効数字 3 桁で答えると $52.1 \leqq \mu \leqq 61.9$ または $[52.1, 61.9]$ となる。

ちなみに 95%信頼区間は $\varepsilon = 1.960$ を使って $53.3 \leqq \mu \leqq 60.7$ となります。

注）途中計算は有効数字より 1 〜 2 桁多めに計算した方が良い。

お詫び）演習のプリントの信頼区間の確率が 99%と 95%の両方が記載されていました。
採点は両方〇にしてあります。

確率統計　区間推定

・母平均 μ に関する区間推定

・母分散が未知の場合

基本的には母分散既知と同じ考え方であるが、母分散が未知のため σ の値を使う Z での変換ができない。そこで母分散 σ^2 の代わりに標本分散 s^2 を使って

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

と変換を行う。この t は標準正規分布ではなく、自由度 $n-1$ の t 分布に従うことが知られている。そこで $100(1-\alpha)\%$ の信頼区間を求める場合、

$$P(-t_\alpha \leqq T \leqq t_\alpha) = 1 - \alpha$$

になるように t_α を決める。この t_α は表をつかって求めることになる。

確率の括弧の中身は母分散既知のときと同様に

$$-t_\alpha \leqq \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \leqq t_\alpha \quad \Rightarrow \quad \bar{x} - t_\alpha \times \frac{s}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \bar{x} + t_\alpha \times \frac{s}{\sqrt{n}}$$

と変形できるので、$(\bar{x} - t_\alpha \times \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_\alpha \times \frac{s}{\sqrt{n}})$ の間に真の平均 μ が入っている確率は、事前に決めた確率となる。

例. 母集団が母分散未知の正規分布に従うとする。そこから無作為に 10 個のデータが得られ、標本平均が 17.44、標本分散が $(2.95)^2$ だったとする。このとき、母平均 μ の 99%信頼区間を求めよ。

母分散が未知なので、t をつかって変換すると、

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

が自由度 $10 - 1 = 9$ の t 分布に従う。よって、$P(-t_\alpha \leqq T \leqq t_\alpha) = 0.99 = 1 - 0.01$ となる t_α を両側 $100\alpha\%$ の t 分布の表から求めると、自由度 9 で確率 $1 - 0.99 = 0.01$ の部分の値を調べればよいので、$t_\alpha = 3.2498$ であることがわかる。よって母平均の 99%信頼区間は

$$-3.2498 \leqq \frac{17.44 - \mu}{\frac{2.95}{\sqrt{10}}} \leqq 3.2498$$

を満たせばよいので、この不等式を μ について解くと、

$$17.44 - 3.2498 \times \frac{2.95}{\sqrt{10}} \leqq \mu \leqq 17.44 + 3.2498 \times \frac{2.95}{\sqrt{10}}$$

$$14.4083 \cdots \leqq \mu \leqq 20.4716 \cdots$$

である。つまり、母平均の 99%信頼区間を有効数字 3 桁で答えると $(14.4, 20.5)$ となる。

自由度 m の t 分布の両側 $100\alpha\%$ 点

m	0.10	0.05	0.02	0.01
1	6.3137	12.706	31.821	63.656
2	2.9200	4.3027	6.9645	9.9250
3	2.3534	3.1824	4.5407	5.8408
4	2.1318	2.7765	3.7469	4.6041
5	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	1.8946	2.3646	2.9979	3.4995
8	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693

2019年度 確率統計　小テスト解答用紙　2019.11.12

・母分散が未知の場合の区間推定

母集団が母分散未知の正規分布に従うとき、７つのデータ

72.3, 77.9, 67.3, 73.9, 65.0, 70.1, 79.6

が与えられたときの母平均 μ の 95%信頼区間を次の通り求めよ。

(1) 関数電卓を使い標本平均 $\bar{x}$, 標本分散 s^2, 標本標準偏差 s を求めよ。

(2) t 分布の表を用いて母分散が未知の場合の 95%信頼区間を求めよ。

2019年度神奈川工科大学 確率統計 演習問題	学科	学年	組	学　籍　番　号	氏　　　名	

提出先：K3-3309号室前　17番のボックス　提出期限：１１月１３日（水）１７時頃まで