確率統計 前回の解答

2019.10.29 分

表の出る確率 $p = \frac{1}{6}$，試行回数 $n = 1620$ の二項分布に従う確率変数が $[255, 294]$ に入る確率 $P(255 \leqq X \leqq 294)$ を正規分布で近似して求めよ。ただし、標準正規分布の確率を計算する場合、変換後の両端の値は小数第 3 位を四捨五入した値を用いること。

二項分布の母平均 μ と母分散 σ^2 を求めると

$$\mu = np = 1620 \times \frac{1}{6} = 270$$

$$\sigma^2 = np(1-p) = 1620 \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) = 225 = 15^2$$

であるから、正規分布 $N(270, 15^2)$ で近似できる。従って

$$Z = \frac{X - 270}{15}$$

で変換すれば標準正規分布 $N(0, 1^2)$ になる。

よって

$$\begin{aligned} P(255 \leqq X \leqq 294) &= P\left(\frac{255-270}{15} \leqq Z \leqq \frac{294-270}{15}\right) \\ &= P\left(-1 \leqq Z \leqq \frac{8}{5}\right) = P(-1.00\cdots \leqq Z \leqq 1.60) \\ &= P(-1.00 \leqq Z \leqq 0) + P(0 < Z \leqq 1.60) \\ &= 0.34134 + 0.44520 = 0.78654 = 0.787 \end{aligned}$$

二項分布の確率を精密に計算すると $0.79697\cdots$ であるから、ある程度近い値であることがわかる。さらに近似の精度を良くするためには、半整数補正を行い区間の幅を上限下限とも 0.5 ずつ範囲を広げればよい。つまり、確率を求める範囲を $[255, 294]$ から $[254.5, 294.5]$ にすることで

$$\begin{aligned} P(254.5 \leqq X \leqq 294.5) &= P\left(\frac{254.5-270}{15} \leqq Z \leqq \frac{294.5-270}{15}\right) \\ &= P\left(-1.033\cdots \leqq Z \leqq 1.6333\cdots\right) \\ &= P\left(-1.03 \leqq Z \leqq 1.63\right) \\ &= P(-1.03 \leqq Z \leqq 0) + P(0 < Z \leqq 1.63) \\ &= 0.34849 + 0.44845 = 0.79694 = 0.797 \end{aligned}$$

のように、真の値である $0.79697\cdots$ にかなり近い値が得られる。

・再提出の学生は $P(237 \leqq X \leqq 264)$ で再提出。

（最尤推定量はやらなくてよい）

・最尤推定量

指数分布 $f(x|\lambda)=\lambda e^{-\lambda x}$ の尤度関数および対数尤度関数を求め、パラメータ λ の最尤推定量を求めよ。

n 個の標本値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が得られたときの尤度関数は

$$L(\lambda|x_1, x_2, \cdots, x_n)=\left(\lambda e^{-\lambda x_1}\right)\times\left(\lambda e^{-\lambda x_2}\right)\times\cdots\times\left(\lambda e^{-\lambda x_n}\right)=\lambda^n\times e^{-\lambda\sum x_i}$$

であり、対数尤度関数は

$$\log L(\lambda|x_1, x_2, \cdots, x_n)=n\log\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$$

となる。対数尤度関数を λ で微分して最大となる点を求めると

$$\frac{d}{d\lambda}\log L(\lambda|x_1, x_2, \cdots, x_n)=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{\lambda}=\bar{x}\quad\Rightarrow\quad\lambda=\frac{1}{\bar{x}}$$

つまり λ の最尤推定量は $\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\bar{x}}$ である。

ちなみに、指数分布の母平均は $\dfrac{1}{\lambda}$ なので、指数分布の場合も標本平均 $\bar{x}$ は母平均 μ の不偏推定量かつ最尤推定量になっている。

《尤度関数のまま微分する場合》

$$\frac{d}{d\lambda}L(\lambda|x_1, x_2, \cdots, x_n)=n\lambda^{n-1}\times e^{-\lambda\sum x_i}-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\times\lambda^n\times e^{-\lambda\sum x_i}$$

$$=\left(n-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\times\lambda^{n-1}\times e^{-\lambda\sum x_i}$$

この値を 0 にするには $\lambda^{n-1}>0, e^{-\lambda\sum x_i}>0$ なので $n-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i=0$ である。

よって　$\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i=n\ \Rightarrow\ \lambda=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}=\dfrac{1}{\bar{x}}$　と同じ結果になる。

資料（主に解答と演習問題）の置き場

https://www.gen.kanagawa-it.ac.jp/takeda/class

中間試験は１１月１９日（火）です。

確率統計　　母平均 μ の区間推定

・平均の区間推定（母分散既知）

母集団が $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとき、無作為抽出された n 個のデータを使って計算された標本平均は $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ に従うことが理論的にわかっている。よって

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。そこで

$$P(-z_\alpha<Z<z_\alpha)=1-\alpha \qquad (1-\alpha \text{ は事前に決めた確率})$$

になるように z_α を決める。確率の括弧の中身は

$$-z_\alpha<\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<z_\alpha \quad \Rightarrow \quad \bar{X}-z_\alpha\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+z_\alpha\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

と変形できるので、確率変数 $\bar{X}$ を実際の値 $\bar{x}$ で置き換えて $[\bar{x}-z_\alpha\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+z_\alpha\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ の間に真の平均 μ が入っている確率は、事前に決めた確率となる。

$P(-z_\alpha<Z<z_\alpha)=1-\alpha$ となる z_α の求め方については、分布の両端に $\frac{\alpha}{2}$ となるように決めればよいので、

$$P(0<Z<z_\alpha)=\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}$$

となる z_α を探せばよい。例えば $\alpha=0.05$ (95%) の場合

$$P(0<Z<z_\alpha)=0.5-0.025=0.475$$

なので、標準正規分布の表の確率が 0.475 に一番近い値を探せばよい。$z=1.96$ のとき 0.4750 であるから、母平均の 95%信頼区間は

$$\bar{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

となる。良く使う $\alpha=0.05$ と $\alpha=0.01$ のときの z_α の正確な値は次の通りである。

$\alpha=0.05$ のとき $z_\alpha=1.95996\cdots=1.960$
$\alpha=0.01$ のとき $z_\alpha=2.57582\cdots=2.576$

これらの値は前に配布した標準正規分布の表の下に確率の値から z_α の値を求める表を載せてあります。試験の際には同じものを配布しますので、使い方を覚えてください。

確率統計　　関数電卓の使い方

次の９つのデータの標本平均 $\bar{x}$, 標本分散 s^2, 標本標準偏差 s を求めよ。

33,　54,　36,　42,　39,　47,　51,　40,　45

１）関数電卓を統計モードに変更

ＳＨＡＲＰ：　MODE キー　→　STAT　→　SD　の順
ＣＡＳＩＯ：　MODE キー　→　STAT　→　1-VAR　の順
（人数の多かった機種の一例です）

統計モードの場合、電卓のどこかに「STAT」や「SD」も文字が入ります。

ちなみに元の電卓モードに戻す場合は
ＳＨＡＲＰ：　MODE キー　→　COMP　もしくは　NORMAL　の順
ＣＡＳＩＯ：　MODE キー　→　COMP　の順

２）データの入力

基本的には　データ入力　⇒　確定ボタン　の順を繰り返す

確定ボタンはほとんどの機種が「Ｍ＋」を押すだけ !!
（Ｍ＋の下に《ＤＡＴＡ》,《ＤＴ》と書いてあります）

３）結果の出力

標本平均 $\bar{x}$

ＳＨＡＲＰ：　ALPHA キー　→　$\bar{x}$ と書いてある数字　→　＝　の順
ＣＡＳＩＯ：　SHIFT キー　→　STAT　→　VAR　→　$\bar{x}$　→　＝　の順

標本標準偏差 s

ＳＨＡＲＰ：　ALPHA キー　→　sx と書いてある数字　→　＝　の順
ＣＡＳＩＯ：　SHIFT キー　→　STAT　→　VAR　→　$x\sigma_{n-1}$　→　＝　の順

分散 s^2 の値は標本標準偏差 s を２乗すればよい。

以上のことを踏まえて標本平均 $\bar{x}$、標本標準偏差 s、標本分散 s^2 の値を計算すると

$$\bar{x} = 43 \quad (= 43.0)$$

$$s = 6.89202\cdots \quad (= 6.89)$$

$$s^2 = 47.5 \quad (= 47.5)$$

となります。

・関数電卓の使い方

次の９個のデータの標本平均・標本分散を求めよ。

33,　54,　36,　42,　39,　47,　51,　40,　45

解答）

$$\bar{x} = \frac{33+54+36+42+39+47+51+40+45}{9} = \frac{387}{9} = 43$$

$$s^2 = \frac{1}{9-1}\sum_{i=1}^{9}(x_i - 43)^2 = \frac{100+121+49+1+16+16+64+9+4}{8} = \frac{95}{2} = 47.5$$

$$s = \sqrt{47.5} = 6.89202\cdots = 6.89$$

参考）標本分散の通常電卓を使った計算方法

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$$

であるから、データの２乗和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ を計算できれば良い。

２乗和の計算は電卓のメモリ機能を使えば簡単にできる。

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = 33^2 + 54^2 + 36^2 + 42^2 + 39^2 + 47^2 + 51^2 + 40^2 + 45^2 = 17021$$

$$s^2 = \frac{1}{9-1}\left(17021 - 9\times 43^2\right) = \frac{17021-16641}{8} = \frac{380}{8} = \frac{95}{2} = 47.5$$

のように定義通り計算した結果と一致する。

2019年度 確率統計　小テスト解答用紙

2019.11. 5

・母分散が既知の場合の区間推定

母集団が母分散 $\sigma^2 = 5.00^2$ の正規分布に従うとき、７つのデータ

52.3, 55.9, 64.6, 53.9, 61.2, 51.5, 59.6

が与えられたときの母平均 μ の 99%信頼区間を次の通り求めよ。

(1) 関数電卓を使い標本平均 $\bar{x}$, 標本分散 s^2, 標本標準偏差 s を求めよ。

(2) 母分散が既知の場合の 95%信頼区間を求めよ。

2019年度神奈川工科大学 確率統計 演習問題	学科	学年	組	学　籍　番　号	氏　　　名	

提出先：K3-3309号室前　17番のボックス　　提出期限：１１月　６日（水）１７時頃まで