・母平均と母分散

下記の表のような確率をもつ離散型の確率分布の母平均と母分散を求めよ。

X	-4	1	3	11
確率	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$

なお、母分散は $E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - \mu^2$ を用いて計算しても良い。

・母平均 μ

$$
\begin{aligned}
\mu = E[X] &= (-4) \times \frac{2}{20} + 1 \times \frac{9}{20} + 3 \times \frac{4}{20} + 11 \times \frac{5}{20} \\
&= \frac{(-4) \times 2 + 1 \times 9 + 3 \times 4 + 11 \times 5}{20} \\
&= \frac{-8 + 9 + 12 + 55}{20} = \frac{68}{20} = \frac{17}{5} = 3.40
\end{aligned}
$$

・母分散 σ^2《定義通り》

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= E[(X-\mu)^2] \\
&= \left(-4 - \frac{17}{5}\right)^2 \times \frac{2}{20} + \left(1 - \frac{17}{5}\right)^2 \times \frac{9}{20} + \left(3 - \frac{17}{5}\right)^2 \times \frac{4}{20} + \left(11 - \frac{17}{5}\right)^2 \times \frac{5}{20} \\
&= \left(-\frac{37}{5}\right)^2 \times \frac{2}{20} + \left(-\frac{12}{5}\right)^2 \times \frac{9}{20} + \left(-\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{4}{20} + \left(\frac{38}{5}\right)^2 \times \frac{5}{20} \\
&= \frac{1369 \times 2 + 144 \times 9 + 4 \times 4 + 1444 \times 5}{500} = \frac{11270}{500} = \frac{1127}{50} = 22.54\ (= 22.5)
\end{aligned}
$$

・母分散 σ^2《$E[X^2]$ を使う》

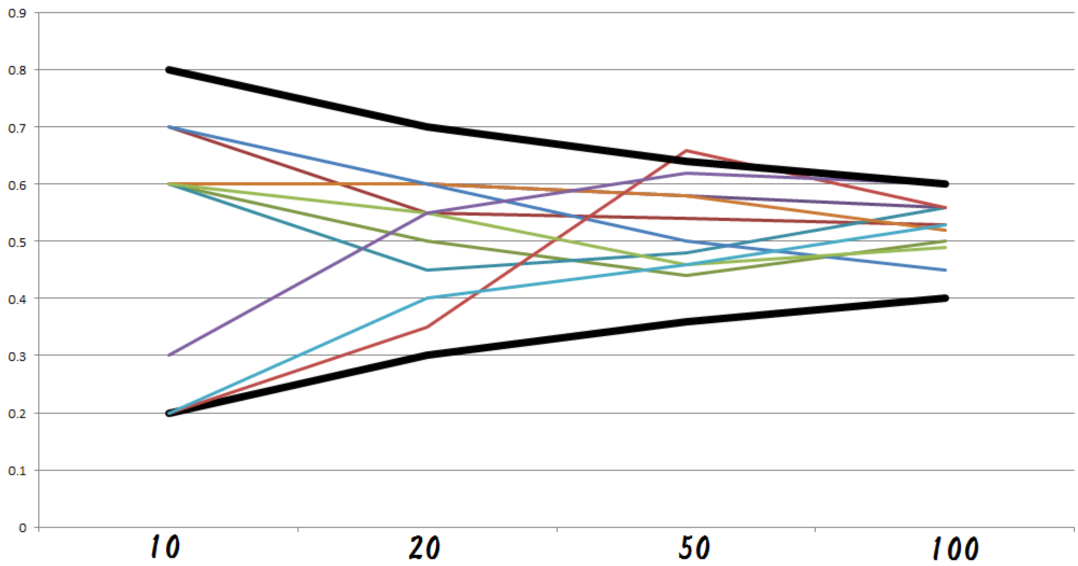
$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= (-4)^2 \times \frac{2}{20} + 1^2 \times \frac{9}{20} + 3^2 \times \frac{4}{20} + 11^2 \times \frac{5}{20} \\
&= \frac{16 \times 2 + 1 \times 9 + 9 \times 4 + 121 \times 5}{20} = \frac{682}{20} = \frac{341}{10}
\end{aligned}
$$

$$
\sigma^2 = E[X^2] - \mu^2 = \frac{341}{10} - \left(\frac{17}{5}\right)^2 = \frac{1705 - 578}{50} = \frac{1127}{50}
$$

母分散はどちらの方法で計算しても $\frac{1127}{50} = 22.54\ (= 22.5)$ となる。

・実際にコイン投げを１００回行い、１０回・２０回・５０回・１００回までの結果から表の出る確率をそれぞれ推定せよ。解答用紙には１００回分の結果と１０回・２０回・５０回・１００回のときの推定値を書くこと。

期限内に提出された 10 人分の前回の演習問題の結果をグラフにまとめると



のようになる。太線は９５％の確率で出現する値（信頼区間）である。値にすると

	10	20	50	100
区間	$[0.200, 0.800]$	$[0.300, 0.700]$	$[0.360, 0.640]$	$[0.400, 0.600]$

のように回数が増えると範囲が狭くなっていることがわかる。ちなみに 1,000 回投げたときは $[0.469, 0.531]$ であり、10,000 回投げたときは $[0.4902, 0.5098]$ となり、だんだん理論値である 0.500 に近づいている。

今回の結果では数名が区間外になるときがあるが、９５％の確率で入る区間であるため、残り５％の確率で区間外になる。つまり、２０人もいれば１～２人程度区間外が出てもまったくおかしなことではない。

資料置場

https://www.gen.kanagawa-it.ac.jp/takeda/class/

中心極限定理と二項分布の正規近似

・中心極限定理

$\{X_n\}$ は独立で同一分布に従う確率変数列とし、$\mu = E[X_1],\ \sigma^2 = V[X_1]$ は共に存在るものとする。Z は標準正規分布 $N(0, 1^2)$ に従う確率変数とし、$S_n = X_1 + \cdots + X_n$ とおくと、確率変数 $\frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は Z に法則収束する。

つまり、平均と分散を持つ母集団から得られる標本平均の分布はデータの数 n が十分大きければ正規分布で近似できることを示している。正規分布に近づく早さは母集団の分布によって異なるが、二項分布は特に早く正規分布に収束する。

例． 二項分布の場合

表が出る確率 p のコイン投げを n 回投げたとき、表の出る回数 X は二項分布に従う。二項分布の母平均は $\mu = np$，母分散は $\sigma^2 = np(1-p)$ であるから、次のような変換によって、標準正規分布で近似することができる。

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

例題． $p = \frac{1}{4}$ のコイン投げを 1,000 回行ったとき、$[220, 270]$ の間に入る確率を求めよ。

二項分布の母平均と母分散は $\mu = 1000 \times \frac{1}{4} = 250$ ，　$\sigma^2 = 1000 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 187.5$ なので、$[220, 270]$ の間に入る確率は

$$\begin{aligned} P(220 \leqq X \leqq 270) &= P\left(\frac{220 - 250}{\sqrt{187.5}} \leqq Z \leqq \frac{270 - 250}{\sqrt{187.5}}\right) \\ &= P\left(-2.19 \leqq Z \leqq 1.46\right) \\ &= 0.48574 + 0.42786 = 0.91360 = 0.914 \end{aligned}$$

この確率を二項分布を使ってまともに計算するとかなり近い値を得る。

$$\sum_{k=220}^{270} {}_{1000}C_k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{1000-k} = 0.9197\cdots$$

しかしこの計算の組み合わせの数は莫大（${}_{1000}C_{250}$ で 200 桁近くになる）でまともに計算はできない。このような場合、標準正規分布を用いた近似計算は非常に役立つ。

2019年度 確率統計S　小テスト解答用紙　2019.10.25

・大標本分布（二項分布の正規近似）

表の出る確率 $p = \frac{5}{6}$，試行回数 $n = 6480$ の二項分布に従う確率変数が $[5372, 5413]$ に入る確率 $P(5372 \leqq X \leqq 5413)$ を正規分布で近似して求めよ。ただし、標準正規分布の確率を計算する場合、変換後の両端の値は小数第３位を四捨五入した値を用いること。

（裏面にもう１問あります）

2019年度神奈川工科大学 確率統計S 演習問題	学科	学年	組	学　籍　番　号	氏　　　名	

提出先：K3-3309号室前　18番のボックス　提出期限：１０月２８日（月）１７時頃まで

・最尤推定量

指数分布 $f(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$ の尤度関数および対数尤度関数を求め、パラメータ λ の最尤推定量を求めよ。

ヒント：尤度関数より、対数尤度関数を λ で微分した方が簡単です。