2019.11.22 (本試験)

確率統計S　中間テスト　　特別専攻　（金曜５限）　　担当：竹田

注意）確率の値は既約分数または有効数字３桁以上で答えること

１．離散型・連続型分布の確率計算（１０＋１０＋１０＋１０＝４０点）

・フィギュアスケートの４回転を成功する確率が $p=\dfrac{5}{6}$ のとき、次の確率を求めよ。

1) ５回中４回以上成功する確率。（ヒント：４回と５回成功する確率の和）

$n=5, p=\frac{5}{6}$ の二項分布の確率 $P(X=4)$ と $P(X=5)$ の和を求めればよいので

$$P(X=4)={}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(1-\frac{5}{6}\right)^1=5\times\frac{625}{1296}\times\frac{1}{6}=\frac{3125}{7776}$$

$$P(X=5)={}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{5}{6}\right)^5\left(1-\frac{5}{6}\right)^0=1\times\frac{125}{216}\times\frac{1}{36}=\frac{3125}{7776}$$

であるから、求める確率は

$$\frac{3125}{7776}+\frac{3125}{7776}=\frac{6250}{7776}=\frac{3125}{3888}=0.80375\cdots=0.804$$

2) ６回目に初めて失敗する確率。

５回連続して成功して、６回目に失敗すればよいので

$$\left(\frac{5}{6}\right)^5\times\left(1-\frac{5}{6}\right)=\frac{3125}{7776}\times\frac{1}{6}=\frac{3125}{46656}=0.066979\cdots=0.0670$$

・次の連続型確率変数に関する確率を求めよ。

3) X が確率密度関数 $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{42}\ \ (2\leqq x\leqq 8)$ の分布に従うとき、

$\left[\dfrac{7}{2},\ 5\right]$ の間に X が入る確率

$$P\left(\frac{7}{2}\leqq X\leqq 5\right)=\int_{\frac{7}{2}}^{5}\frac{(x-3)^2}{42}\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{u^2}{42}\,du=\left[\frac{u^3}{126}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$=\frac{4}{63}-\frac{1}{1008}=\frac{64-1}{1008}=\frac{63}{1008}$$

$$=\frac{1}{16}=0.0625$$

4) X が平均 0，分散 1^2 の標準正規分布 $N(0,1^2)$ に従うとき、

$[\,0.07,\ 1.75\,]$ の間に X が入る確率

$$P(0.07\leqq X\leqq 1.75)=P(0\leqq X\leqq 1.75)-P(0\leqq X<0.07)$$

$$=0.45994-0.02790=0.43204=0.432$$

注）0.02790 を 0.2790 とする人が多数いた。

２．期待値の計算（１０＋１０＝２０点）

下記の表のような確率をもつ離散型の確率分布の平均、分散を求めよ。

X	-7	0	2	9
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

なお、分散の計算は $E[(X-\mu)^2]$ と $E[X^2]-\mu^2$ のどちらを使っても良い。

母平均 μ

$$E[X] = -7 \times \frac{5}{20} + 0 \times \frac{3}{20} + 2 \times \frac{4}{20} + 9 \times \frac{8}{20}$$
$$= \frac{-35+0+8+72}{20} = -\frac{45}{20} = -\frac{9}{4} = 2.25$$

母分散 μ

$$E[(X-\mu)^2] = \left(-7-\frac{9}{4}\right)^2 \times \frac{5}{20} + \left(0-\frac{9}{4}\right)^2 \times \frac{3}{20} + \left(2-\frac{9}{4}\right)^2 \times \frac{4}{20} + \left(9-\frac{9}{4}\right)^2 \times \frac{8}{20}$$
$$= \frac{1369}{16} \times \frac{5}{20} + \frac{81}{16} \times \frac{3}{20} + \frac{1}{16} \times \frac{4}{20} + \frac{729}{16} \times \frac{8}{20}$$
$$= \frac{6845+243+4+5832}{320} = \frac{12924}{320} = \frac{3231}{80} = 40.3875 = 40.4$$

もしくは

２次の期待値 $E[X^2]$

$$E[X^2] = (-7)^2 \times \frac{5}{20} + 0^2 \times \frac{3}{20} + 2^2 \times \frac{4}{20} + 9^2 \times \frac{8}{20}$$
$$= \frac{245+0+16+648}{20} = \frac{909}{20}$$

から母平均の２乗 μ^2 を引いて

$$E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - \mu^2$$
$$= \frac{909}{20} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{3636-405}{80} = \frac{3231}{80}$$

３．大標本分布（１５点）

表の出る確率 $p = \frac{4}{7}$，試行回数 $n = 9408$ の二項分布に従う確率変数が $[5269, 5432]$ に入る確率 $P(5269 \leqq X \leqq 5432)$ を正規分布で近似して求めよ。ただし、標準正規分布の確率を計算する場合、変換後の両端の値は小数第３位を四捨五入した値を用いること。

二項分布の母平均 μ と母分散 σ^2 を求めると

$$\mu = np = 9408 \times \frac{4}{7} = 5376$$

$$\sigma^2 = np(1-p) = 9408 \times \frac{4}{7} \times \left(1 - \frac{4}{7}\right) = 2304 = 48^2$$

であるから、正規分布 $N(5376, 48^2)$ で近似できる。従って

$$Z = \frac{X - 5376}{48}$$

で変換すれば標準正規分布 $N(0, 1^2)$ になる。

よって

$$P(5269 \leqq X \leqq 5432) = P\left(\frac{5269-5376}{48} \leqq Z \leqq \frac{5432-5376}{48}\right)$$
$$= P\left(-\frac{107}{48} \leqq Z \leqq \frac{7}{6}\right) = P(-2.2291\cdots \leqq Z \leqq 1.1666\cdots)$$
$$= P(-2.23 \leqq Z \leqq 1.17)$$
$$= P(-2.23 \leqq Z \leqq 0) + P(0 < Z \leqq 1.17)$$
$$= 0.48713 + 0.37900 = 0.86613 = 0.866$$

ちなみに二項分布の確率を精密に計算すると $0.86783\cdots$ と近い値であることがわかる。さらに半整数補正を行った場合、区間の幅を ± 0.5 して、正規分布 $N(5376, 48^2)$ において $[5268.5, 5432.5]$ に入る確率を求めさらに近い値を得る。

$$P(5268.5 \leqq X \leqq 5432.5) = P(-2.2395 \leqq Z \leqq 1.1770\cdots)$$
$$= P(-2.24 \leqq Z \leqq 0) + P(0 < Z \leqq 1.18)$$
$$= 0.48745 + 0.38100 = 0.86845 = 0.868$$

４．区間推定（２５点）

次の数値はある工場で作られたねじ山の直径を 6 本の調べた結果である。

42.3　47.2　45.9　49.4　46.2　45.6　　　(単位は mm)

ねじ山の直径の母集団分布は母分散未知の正規分布であると仮定できるとき、このねじ山の直径の母平均 μ に対する９５％信頼区間を次の順序に従って求めよ。

(1) 標本平均・標本分散を求める

$\bar{x} = 46.1,\ s^2 = 5.368 = 5.37\ (s = 2.3168\cdots = 2.317)$

(2) Z もしくは T で変換する（どちらを使うか理由を書くこと）

母分散の情報が無い（未知）なので、T で変換する。

(3) $P(-\varepsilon < Z \text{ or } T < \varepsilon) = 0.95$ になる ε の値を表から求める

T で変換すると自由度 $6-1=5$ の t 分布に従うので、表の $m=5, \alpha=0.05$ より 2.5706

(4) 信頼区間を求める

$$-2.571 \leqq \frac{46.1-\mu}{\frac{2.317}{\sqrt{6}}} \leqq 2.571$$
$$-2.571 \leqq \frac{46.1-\mu}{0.9459} \leqq 2.571$$
$$-2.432 \leqq 46.1-\mu \leqq 2.432$$
$$46.1-2.432 \leqq \mu \leqq 46.1+2.432$$
$$43.668 \leqq \mu \leqq 48.532$$
$$43.7 \leqq \mu \leqq 48.5$$

よって９５％信頼区間は $[43.7, 48.5]$ である。