# 解析学 II　　前回の解答例　　2020. 1.10 分

1) 3 重積分 $\displaystyle\iiint_{\substack{1 \leqq x \leqq 2 \\ -1 \leqq y \leqq 2 \\ -2 \leqq z \leqq 2}} (4xy - 3z^2)\,dxdydz$ を $z \to y \to x$ の順に積分せよ。

$$
\begin{aligned}
\iiint_{\substack{1 \leqq x \leqq 2 \\ -1 \leqq y \leqq 2 \\ -2 \leqq z \leqq 2}} (4xy - 3z^2)\,dxdydz &= \int_1^2 \left\{ \int_{-1}^2 \left\{ \int_{-2}^2 (4xy - 3z^2)\,dz \right\} dy \right\} dx \\
&= \int_1^2 \left\{ \int_{-1}^2 \left\{ \Big[(4xyz - z^3\Big]_{z=-2}^{z=2} \right\} dy \right\} dx \\
&= \int_1^2 \left\{ \int_{-1}^2 \{(8xy - 8) - (-8xu + 8)\}\, dy \right\} dx \\
&= \int_1^2 \left\{ \int_{-1}^2 (16xy - 16), dy \right\} dx \\
&= \int_1^2 \left\{ \Big[8xy^2 - 16y\Big]_{y=-1}^{y=2} \right\} dx \\
&= \int_1^2 \{(32x - 32) - (8x + 16)\}\, dx \\
&= \int_1^2 (24x - 48)\, d = \Big[12x^2 - 48x\Big]_1^2 \\
&= (48 - 96) - (12 - 48) = -48 - (-36) = -12
\end{aligned}
$$

2) 曲線 $f(x) = \dfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$　$(0 \leqq x \leqq 3)$ の長さを求めよ。

$f'(x) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = x^{\frac{1}{2}}$ であるから、曲線の長さは

$$
\int_0^3 \sqrt{1 + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx = \int_0^3 \sqrt{1+x}\, dx
$$

で求めることができる。$t = 1 + x$ として置換積分すると $\frac{dt}{dx} = 1 \;\Rightarrow\; dx = dt$ であり、$x = 0$ のとき $t = 1$、$x = 3$ のとき $t = 4$ なので

$$
\begin{aligned}
\int_0^3 \sqrt{1+x}\, dx &= \int_1^4 \sqrt{t}\, dt = \int_1^4 t^{\frac{1}{2}}\, dt \\
&= \left[ \frac{1}{\frac{1}{2}+1} t^{\frac{1}{2}+1} \right]_1^4 = \left[ \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 \\
&= \frac{2}{3} \times 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \times 1^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \times 8 - \frac{2}{3} \times 1 = \frac{16-2}{3} = \frac{14}{3}
\end{aligned}
$$

注）$4^{\frac{3}{2}} = (4^3)^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$ もしくは $4^{\frac{3}{2}} = (4^{\frac{1}{2}})^3 = 2^3 = 8$

《おまけ》

・$y = x^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の長さについて

$y' = 2x$ であるから、曲線の長さは

$$\int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx$$

で求められる。積分の計算は結構複雑で

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx &= \int_0^{\arctan 2} \sqrt{1+4\left(\frac{1}{2}\tan t\right)^2} \times \frac{1}{2\cos^2 t}\,dt \qquad (x = \tfrac{1}{2}\tan t \text{ で置換積分}) \\
&= \int_0^{\arctan 2} \frac{\sqrt{1+\tan^2 t}}{2\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\arctan 2} \frac{1}{2|\cos^3 t|}\,dt \quad (\text{範囲内では絶対値がいらない}) \\
&= \int_0^{\arctan 2} \frac{\cos t}{2\cos^4 t}\,dt = \int_0^{\arctan 2} \frac{\cos t}{2(1-\sin^2 t)^2}\,dt \qquad (u = \sin t \text{ で置換積分}) \\
&= \int_0^{\sin(\arctan 2)} \frac{1}{2(1-u^2)^2}\,du \\
&= \int_0^{\sin(\arctan 2)} \left(\frac{1}{8(1+u)} + \frac{1}{8(1-u)} + \frac{1}{8(1+u)^2} + \frac{1}{8(1-u)^2}\right) du \\
&= \frac{1}{8}\left[\log|1+u| - \log|1-u| - \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right]_0^{\sin(\arctan 2)}
\end{aligned}$$

ここで $\sin(\arctan 2) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ なので

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8}\left(\log\left|1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right| - \log\left|1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right| - \frac{1}{1+\frac{2}{\sqrt{5}}} + \frac{1}{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left\{\log\left(9+4\sqrt{5}\right) + 4\sqrt{5}\right\} \\
&= \frac{1}{8}\log\left(9+4\sqrt{5}\right) + \frac{\sqrt{5}}{2} = 1.47894285\cdots
\end{aligned}$$

資料置場

https://www.gen.kanagawa-it.ac.jp/takeda/class/

# 2019年度 解析学Ⅱ　小テスト解答用紙

2020. 1.17

## ・体積の計算

放物面 $z = x^2 + (y+1)^2$ と平面 $z = 2y + 2$ によって囲まれた部分の体積を求めよ

| 2019年度神奈川工科大学<br>解析学 Ⅱ<br>演習問題 | 学科 | 学年 | 組 | 学　籍　番　号 | 氏　　　名 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

提出先：K3-3309号室前　18番のボックス　　提出期限：　１月２０日（月）17時頃まで