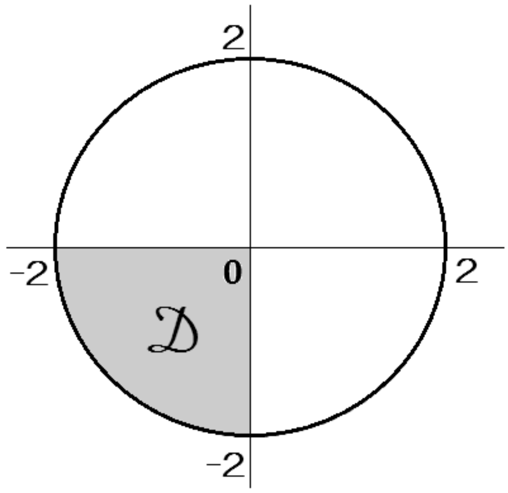
解析学 II　　前回の解答例　　2019.12.13 分

次の重積分の積分領域を図示し、置換積分（極座標変換）を使って計算せよ。

$$\iint_{\substack{0 \leqq x^2+y^2 \leqq 2^2 \\ x \leqq 0 \\ y \leqq 0}} 14xy^4\,dxdy$$



領域 D は、原点を中心とした半径 r の円の方程式が $x^2+y^2=r^2$ なので、$0 \leqq x^2+y^2 \leqq 2^2$ は半径 2 の円の内部であり、さらに条件 $x \leqq 0, y \leqq 0$ によって第 3 象限に限定されるので、次のような領域になる。

この領域を極座標変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ すると、$\begin{cases} 0 \leqq r \leqq 2 \\ \pi \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi \end{cases}$ となる。また、ヤコビアンは

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \left\|\begin{matrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{matrix}\right\| = \left|r\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta)\right| = |r| = r$$

なので、$dxdy = r\,drd\theta$ となる。つまり積分は

$$\begin{aligned}
\iint_{\substack{0 \leqq x^2+y^2 \leqq 2^2 \\ x \leqq 0 \\ y \leqq 0}} 14xy^4\,dxdy &= \iint_{\substack{0 \leqq r \leqq 2 \\ \pi \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi}} 14 \times (r\cos\theta) \times (r\sin\theta)^4 \times r\,drd\theta \\
&= \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \left\{ \int_0^2 14r^6 \cos\theta \sin^4\theta\,dr \right\} d\theta = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \Big[2r^7 \cos\theta \sin^4\theta \Big]_{r=0}^{r=2} d\theta \\
&= \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} 256\cos\theta\sin^4\theta\,d\theta \quad \left(u = \sin\theta \text{ で変数変換。} d\theta = \frac{1}{\cos\theta}\,du\right) \\
&\qquad \left(\text{積分範囲は } \theta = \pi \text{ のとき } u = 0,\ \theta = \tfrac{3}{2}\pi \text{ のとき } u = -1\right) \\
&= \int_0^{-1} 256u^4\,du = \left[\frac{256}{5}u^5\right]_0^{-1} = -\frac{256}{5} - 0 = -\frac{256}{5}
\end{aligned}$$

注：r の次数を間違えやすいので注意が必要。x にも y にも r があり、
さらにヤコビアンにも r があるので、数え間違えの無いように !!

ちなみに、通常の重積分では次のように計算できる。

$$\begin{aligned}
\iint_{\substack{0 \leqq x^2+y^2 \leqq 2^2 \\ x \leqq 0 \\ y \leqq 0}} 14xy^4\,dxdy &= \int_{-2}^{0} \left\{ \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} 14xy^4\,dx \right\} dy = \int_{-2}^{0} \Big[7x^2y^4 \Big]_{x=-\sqrt{4-y^2}}^{x=0} dy \\
&= \int_{-2}^{0} \left\{ 0 - 7(4-y^2)y^4 \right\} dy = \int_{-2}^{0} \left(-28y^4 + 7y^6 \right) dy \\
&= \left[-\frac{28}{5}y^5 + y^7 \right]_{-2}^{0} = 0 - \left(\frac{896}{5} - 128 \right) = -\frac{256}{5}
\end{aligned}$$

資料置場

https://www.gen.kanagawa-it.ac.jp/takeda/class/

2019年度 解析学Ⅱ　小テスト解答用紙

2019.12.20

・広義積分

次の重積分の計算をせよ。

$$\iint_{\substack{0 \leqq x^2+y^2 \leqq 2^2 \\ 0 \leqq x \\ 0 \leqq y}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$$

2019年度神奈川工科大学 解析学 Ⅱ 演習問題	学科	学年	組	学　籍　番　号	氏　　　　名	

提出先：K3-3309号室前　18番のボックス　　提出期限：１２月２３日（月）１７時頃まで