解析学 II　　前回の解答例　　　　2019.11. 8 分

問. $x^2-3xy+5y^2-9=0$ が定める陰関数において、次の問に答えよ

(1) 点 $\left(3,\ \dfrac{9}{5}\right)$ における接線の方程式を求めよ。

陰関数の定理を用いて $\phi'(x)$ を求めると

$$\phi'(x)=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=-\frac{2x-3y}{-3x+10y}=\frac{2x-3y}{3x-10y}$$

である。$x=3,\ y=\frac{9}{5}$ を代入して接線の傾きを求めると

$$\frac{6-\frac{27}{5}}{9-18}=\frac{\frac{3}{5}}{-9}=-\frac{1}{15}$$

なので、接線の方程式は点 $(3,\frac{9}{5})$ を通り、傾き $-\dfrac{1}{15}$ の直線であるから

$$y=-\frac{1}{15}(x-3)+\frac{9}{5}\quad\Rightarrow\quad y=-\frac{1}{15}x+2$$

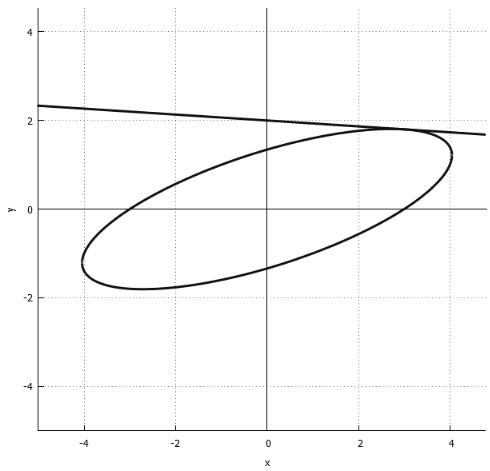
(2) 陰関数の極値をとる点の候補を見つけよ。

$\phi'(x)=0$ を満たす点は $2x-3y=0$ であるから、$y=\dfrac{2}{3}x$ である。

この関係式を元の関数に代入すると

$$x^2-3\times x\times\frac{2}{3}x+5\left(\frac{2}{3}x\right)^2-9=0\ \Rightarrow\ \frac{11}{9}x^2-9=0\ \Rightarrow\ x^2=\frac{81}{11}\ \Rightarrow\ x=\pm\frac{9}{\sqrt{11}}$$

であるから、極値をとる点の候補は $\left(\dfrac{9}{\sqrt{11}},\dfrac{6}{\sqrt{11}}\right),\left(-\dfrac{9}{\sqrt{11}},-\dfrac{6}{\sqrt{11}}\right)$, の 2 点である。



$x^2-3xy+5y^2-9=0$ と $y=-\frac{1}{15}x+2$ のグラフ

資料（主に解答と演習問題）の置き場

https://www.gen.kanagawa-it.ac.jp/takeda/class/

演習の紙をなくした場合は、上記ページからダウンロードして印刷し、提出すること。
（提出先はレポートＢＯＸまたは授業の際に提出）

《発展》実際に極値かどうかを判断するのであれば、$\phi''(x)$ を求めて、符号を判断すればよい。

$$\phi''(x) = \left\{\frac{2x-3\phi(x)}{3x-10\phi(x)}\right\}' = \frac{(2-3\phi'(x))(3x-10\phi(x))-(2x-3\phi(x))(3-10\phi'(x))}{(3x-10\phi(x))^2}$$

これに $x=\frac{9}{\sqrt{11}}, y=\phi(x)=\frac{6}{\sqrt{11}}, \phi'(x)=0$ を代入すると

$$\phi''(\frac{9}{\sqrt{11}}) = \frac{2\times(\frac{27}{\sqrt{11}}-\frac{60}{\sqrt{11}})-(\frac{18}{\sqrt{11}}-\frac{18}{\sqrt{11}})\times 3}{(\frac{27}{\sqrt{11}}-\frac{60}{\sqrt{11}})^2} = \frac{-\frac{66}{\sqrt{11}}}{\frac{1089}{11}} = -\frac{2\sqrt{11}}{33} < 0$$

であるから、$x=\frac{9}{\sqrt{11}}$ のとき $y=\phi(x)=\frac{6}{\sqrt{11}}$ で極大値をとる。

また、$x=-\frac{9}{\sqrt{11}}, y=\phi(x)=-\frac{6}{\sqrt{11}}, \phi'(x)=0$ を代入すると

$$\phi''(-\frac{9}{\sqrt{11}}) = \frac{2\times(-\frac{27}{\sqrt{11}}+\frac{60}{\sqrt{11}})-(-\frac{18}{\sqrt{11}}+\frac{18}{\sqrt{11}})\times 3}{(-\frac{27}{\sqrt{11}}+\frac{60}{\sqrt{11}})^2} = \frac{\frac{66}{\sqrt{11}}}{\frac{1089}{11}} = \frac{2\sqrt{11}}{33} > 0$$

であるから、$x=-\frac{9}{\sqrt{11}}$ のとき $y=\phi(x)=-\frac{6}{\sqrt{11}}$ で極小値をとる。

実際のグラフを見ると、それぞれ最大値、最小値であることが分かる。

中間テストについて

中間テストは来週の 11 月 22 日（金）に行います。

2019年度 解析学Ⅱ　小テスト解答用紙　2019.11.15

・ラグランジュの未定係数法

$x^2+2y^2-6=0$ の条件のもとで、$\dfrac{x^2}{4}-y$ の値の最大値を求めよ。

2019年度神奈川工科大学 解析学 Ⅱ 演習問題	学科	学年	組	学　籍　番　号	氏　　　名	

提出先：K3-3309号室前　18番のボックス　提出期限：１１月１８日（月）１７時頃まで