解析学 II　　前回の解答例　　2019.10.18 分

・２変数関数のテイラーの定理

関数 $f(x,y)=e^{2x}\sin y$ を 3 次の項までマクローリン展開せよ。（例題 6.9 を参照にすること）
また、その結果に $x=-0.1,\ y=-0.1$ を代入して $e^{-0.2}\sin(-0.1)=-0.08173668839360\cdots$ と比較せよ。

$f(x,y)$ の第 3 次導関数を求めると下記の通りである。

$$f_x(x,y)=2e^{2x}\sin y,\ f_y(x,y)=e^{2x}\cos y$$

$$f_{xx}(x,y)=4e^{2x}\sin y,\ f_{xy}(x,y)=2e^{2x}\cos y,\ f_{yy}(x,y)=-e^{2x}\sin y$$

$$f_{xxx}(x,y)=8e^{2x}\sin y,\ f_{xxy}(x,y)=4e^{2x}\cos y,$$
$$f_{xyy}(x,y)=-2e^{2x}\sin y,\ f_{yyy}(x,y)=-e^{2x}\cos y$$

$(x,y)=(0,0)$ を代入すると

$$f_x(x,y)=0,\ f_y(x,y)=1 \qquad f_{xx}(x,y)=0,\ f_{xy}(x,y)=2,\ f_{yy}(x,y)=0$$

$$f_{xxx}(x,y)=0,\ f_{xxy}(x,y)=4,\ f_{xyy}(x,y)=0,\ f_{yyy}(x,y)=-1$$

であるから、マクローリン展開は

$$\begin{aligned} f(x,y)&=0+\Big(0\times x+1\times y\Big)+\frac{1}{2}\Big(0\times x^2+2\times 2\times xy+0\times y^2\Big)\\ &\qquad +\frac{1}{6}\Big(0\times x^3+3\times 4\times x^2y+3\times 0\times xy^2+(-1)\times y^3\Big)+R_4\\ &=y+2xy+\frac{1}{6}(12x^2y-y^3)=y+2xy+2x^2y-\frac{1}{6}y^3+R_4 \end{aligned}$$

実際に $x=-0.1,\ y=-0.1$ を代入すると

$$-0.1+0.02+\frac{-0.012+0.001}{6}=\frac{-600+120-11}{6000}=-\frac{491}{3000}=-0.0818333333\cdots$$

のように、かなり近い値であることがわかる。この他 $(x,y)=(0,0)$ に近い値を代入すると

$(x,y)=(0.1,0.1)$	のとき：	真の値 $0.121936810\cdots$	近似値 $0.121833333\cdots$
$(x,y)=(0.2,0.1)$	のとき：	真の値 $0.148933956\cdots$	近似値 $0.147833333\cdots$
$(x,y)=(-0.2,0.1)$	のとき：	真の値 $0.066920340\cdots$	近似値 $0.067833333\cdots$

のように近い値になっている。

資料置場

https://www.gen.kanagawa-it.ac.jp/takeda/class/

2019年度 解析学Ⅱ　小テスト解答用紙　2019.10.25

・極大極小問題

関数 $f(x,y)=3x^3+2xy^2-4xy$ の極値を次の設問にしたがって求めよ。

(1) $f_x(x,y), f_y(x,y)$ を求める。

(2) $f_x(x,y)=0, f_y(x,y)=0$ を同時に満たす x,y を求める。

(3) $f_{xx}(x,y), f_{yy}(x,y), f_{xy}(x,y)$ を求める。

(4) $\Delta(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-(f_{xy}(x,y))^2$ を求める。

(5) $\Delta(x,y)$ と $f_{xx}(x,y)$ を使って極値の判定。

2019年度神奈川工科大学 解析学 Ⅱ 演習問題	学科	学年	組	学　籍　番　号	氏　　　名	

提出先：K3-3309号室前　18番のボックス　　提出期限：１０月２８日（月）１７時頃まで