微分積分学 Ⅱ-d　　Ｖ科　　前回の解答例　　　　2019.12.17 分

・重積分の復習

1．重積分の変数変換（置換積分）

$$\iint_{\substack{2 \leqq x+y \leqq 4 \\ 0 \leqq x-y \leqq 2}} \frac{x-y}{(x+y)^2}\,dxdy$$

$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$ で変換（置換積分）する。ヤコビアンは $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2}$

より $dxdy = \left|-\frac{1}{2}\right| dudv = \frac{1}{2}dudv$。領域は $\{2 \leqq u \leqq 4,\ 0 \leqq v \leqq 2\}$ であるから積分は

$$\iint_{\substack{2 \leqq x+y \leqq 4 \\ 0 \leqq x-y \leqq 2}} \frac{x-y}{(x+y)^2}\,dxdy = \iint_{\substack{2 \leqq u \leqq 4 \\ 0 \leqq v \leqq 2}} \frac{v}{u^2} \times \frac{1}{2}\,dudv = \int_2^4 \left\{ \int_0^2 \frac{v}{2u^2}\,dv \right\} du$$

$$= \int_2^4 \left\{ \left[\frac{v^2}{4u^2} \right]_{v=0}^{v=2} \right\} du = \int_2^4 \frac{1}{u^2} du = \left[-\frac{1}{u} \right]_2^4 = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

もしこの重積分を x, y のまま行おうとすると、領域は $(1,1),\ (2,0),\ (3,1),\ (2,2)$ を頂点とする菱形になるので、

$$\int_0^1 \left\{ \int_{2-y}^{y+2} \left(\frac{1}{x+y} - \frac{2y}{(x+y)^2} \right) dx \right\} dy + \int_1^2 \left\{ \int_y^{4-y} \left(\frac{1}{x+y} - \frac{2y}{(x+y)^2} \right) dx \right\} dy$$

$$= \int_0^1 \left\{ \left[\log|x+y| + \frac{2y}{x+y} \right]_{x=2-y}^{x=y+2} \right\} dy + \int_1^2 \left\{ \left[\log|x+y| + \frac{2y}{x+y} \right]_{x=y}^{x=4-y} \right\} dy$$

$$= \int_0^1 \left\{ \log|y+1| - \frac{y^2}{y+1} \right\} dy + \int_1^2 \left\{ \frac{y}{2} - \log|y| - 1 + \log 2 \right\} dy$$

$$= \left[y \log|y+1| - \frac{y^2}{2} - 1 \right]_0^1 + \left[\frac{y^2}{4} - y \log|y| + y \log 2 \right]_1^2$$

$$= \left(\log 2 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{3}{4} - \log 2 \right) = \frac{1}{4}$$

のように今まで習ってきた積分計算の知識だけを使って計算できないわけではないが、非常に面倒な積分となる。

２．曲面積を求める

曲面 $z = xy$ の $\{(x,y,z)\,|\,0 \leqq x^2+y^2 \leqq 2^2\}$ にある部分の面積を求めよ。

$z_x = y,\ z_y = x$ であるから、曲面積を求める式は

$$\iint_{0 \leqq x^2+y^2 \leqq 2^2} \sqrt{1+y^2+x^2}\ dxdy$$

極座標変換を行うと $0 \leqq r \leqq 2,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ なので

$$\begin{aligned}
\iint_{0 \leqq x^2+y^2 \leqq 2^2} \sqrt{1+y^2+x^2}\ dxdy &= \iint_{\substack{0 \leqq r \leqq 2 \\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi}} \sqrt{1+(r\sin\theta)^2+(r\cos\theta)^2} \times r\ \ drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^2 r\sqrt{1+r^2}\,dr \right\} d\theta = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_1^5 r\sqrt{t} \times \frac{1}{2r}\,dt \right\} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_1^5 \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt \right\} d\theta = \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_{t=1}^{t=5} \right\} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{5\sqrt{5}-1}{3}\,d\theta = \left[\frac{5\sqrt{5}-1}{3}\theta \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{10\sqrt{5}-2}{3}\pi \left(= \frac{10\sqrt{5}\pi - 2\pi}{3} \right)
\end{aligned}$$

資料置場

https://www.gen.kanagawa-it.ac.jp/takeda/class/

2019年度 微分積分学Ⅱ－d　小テスト解答用紙　2019.12.18

・重積分の復習

1．次の重積分の積分領域 D を簡単に図示し、積分の値を求めよ。

(1) $$\iint_{\substack{0 \leqq x+3y \leqq 6 \\ 0 \leqq x \\ 0 \leqq y \leqq 1}} (4x-5y)\,dxdy$$

(2) $$\iint_{\substack{0 \leqq x^2+y^2 \leqq 4 \\ x \leqq 0 \\ 0 \leqq y}} 28x^4y\,dxdy$$

2．次の３重積分を $z \to x \to y$ の順に積分せよ。

$$\iiint_{\substack{-2 \leqq x \leqq 1 \\ -1 \leqq y \leqq 4 \\ 0 \leqq z \leqq 2}} (5xy-6xz^2)\,dxdydz$$

2019 年度神奈川工科大学 微分積分学 Ⅱ－d 演習問題	学科	学年	組	学　籍　番　号	氏　　　　名	

提出先：K3-3309 号室前　16 番のボックス　　提出期限：１２月１９日（木）１７時頃まで