微分積分学 II-d　　V 科　　前回の解答例　　2019.12.11 分

・曲線 $f(x) = \dfrac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}}$ $(0 \leqq x \leqq 3)$ の長さを求めよ。

$f'(x) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = x^{\frac{1}{2}}$ であるから、曲線の長さは

$$\int_0^3 \sqrt{1 + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx = \int_0^3 \sqrt{1+x}\, dx$$

で求めることができる。$t = 1 + x$ として置換積分すると $\frac{dt}{dx} = 1 \Rightarrow dx = dt$ であり、$x = 0$ のとき $t = 1$、$x = 3$ のとき $t = 4$ なので

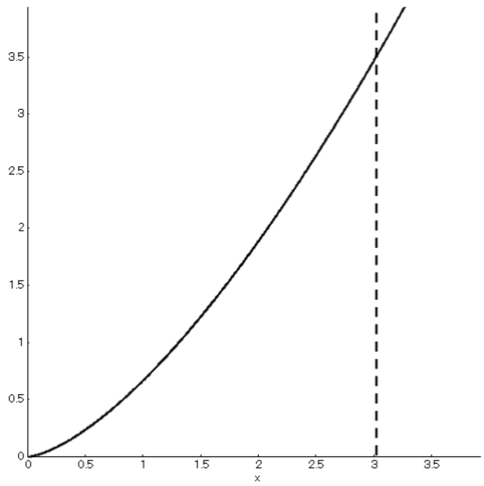
$$\begin{aligned}
\int_0^3 \sqrt{1+x}\, dx &= \int_1^4 \sqrt{t}\, dt = \int_1^4 t^{\frac{1}{2}}\, dt \\
&= \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} t^{\frac{1}{2}+1} \right]_1^4 = \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 \\
&= \frac{2}{3} \times 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \times 1^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \times 8 - \frac{2}{3} \times 1 = \frac{16-2}{3} \\
&= \frac{14}{3}
\end{aligned}$$

注）$4^{\frac{3}{2}} = (4^3)^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$ もしくは $4^{\frac{3}{2}} = (4^{\frac{1}{2}})^3 = 2^3 = 8$

$f(x) = \dfrac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}}$ のグラフは次のようになる。かなり直線に近いが、すこしカーブを描いている。もし 1 本の直線で近似した場合、$(0, 0)$ と $(3, 2\sqrt{3})$ の 2 点間の距離となるので、

$$\sqrt{3^2 + (2\sqrt{3})^3} = \sqrt{9 + 12} = \sqrt{21} = 4.582\cdots$$

と $\frac{14}{3} = 4.666\cdots$ に近い値であるが異なる値となっている（曲がっている分だけ長い）。



資料置場

https://www.gen.kanagawa-it.ac.jp/takeda/class/

積分の別解

$t=\sqrt{1+x} \;\Rightarrow\; t^2=1+x \;\Rightarrow\; x=1+t^2$ より $\frac{dx}{dt}=2t \;\Rightarrow\; dx=2t\,dt$

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{1+x}\,dx &= \int_1^2 t\times 2t\,dt = \int_1^2 2t^2\,dt \\ &= \left[\frac{2}{3}t^3\right]_1^2 = \frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}\end{aligned}$$

《おまけ》

・$y=x^2\ (0 \leqq x \leqq 1)$ の長さについて

$y'=2x$ であるから、曲線の長さは

$$\int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx$$

で求められる。積分の計算は結構複雑で

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx \;&=\; \int_0^{\arctan 2} \sqrt{1+4\left(\frac{1}{2}\tan t\right)^2}\times\frac{1}{2\cos^2 t}\,dt && \text{（}x=\tfrac{1}{2}\tan t\text{ で置換積分）} \\ &=\; \int_0^{\arctan 2} \frac{\sqrt{1+\tan^2 t}}{2\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\arctan 2}\frac{1}{2|\cos^3 t|}\,dt && \text{（範囲内では絶対値がいらない）} \\ &=\; \int_0^{\arctan 2}\frac{\cos t}{2\cos^4 t}\,dt = \int_0^{\arctan 2}\frac{\cos t}{2(1-\sin^2 t)^2}\,dt && \text{（}u=\sin t\text{ で置換積分）} \\ &=\; \int_0^{\sin(\arctan 2)}\frac{1}{2(1-u^2)^2}\,du \\ &=\; \int_0^{\sin(\arctan 2)}\left(\frac{1}{8(1+u)}+\frac{1}{8(1-u)}+\frac{1}{8(1+u)^2}+\frac{1}{8(1-u)^2}\right)du \\ &=\; \frac{1}{8}\left[\log|1+u|-\log|1-u|-\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right]_0^{\sin(\arctan 2)}\end{aligned}$$

ここで $\sin(\arctan 2)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ なので

$$\begin{aligned}&=\; \frac{1}{8}\left(\log\left|1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right|-\log\left|1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right|-\frac{1}{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}+\frac{1}{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}\right) \\ &=\; \frac{1}{8}\left\{\log\left(9+4\sqrt{5}\right)+4\sqrt{5}\right\} \\ &=\; \frac{1}{8}\log\left(9+4\sqrt{5}\right)+\frac{\sqrt{5}}{2}=1.47894285\cdots\end{aligned}$$

2019年度 微分積分学Ⅱ－d　小テスト解答用紙　2019.12.17

・重積分の応用

1．重積分の変数変換（置換積分）

$$\iint_{\substack{2 \leqq x+y \leqq 4 \\ 0 \leqq x-y \leqq 2}} \frac{x-y}{(x+y)^2}\, dxdy$$

2．重積分の応用（曲面積を求める）

曲面 $z = xy$ の $\{(x, y, z) \,|\, 0 \leqq x^2 + y^2 \leqq 2^2\}$ にある部分の面積を求めよ。

2019年度神奈川工科大学 微分積分学Ⅱ－d 演習問題	学科	学年	組	学　籍　番　号	氏　　　　名	

提出先：K3-3309号室前　16番のボックス　　提出期限：１２月１８日（水）授業開始まで