

3重積分 $\iiint_{\substack{1 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 2 \\ -2 \leq z \leq 2}} (4xy - 3z^2) dx dy dz$ を $z \rightarrow x \rightarrow y$ の順に積分せよ。

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\substack{1 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 2 \\ -2 \leq z \leq 2}} (4xy - 3z^2) dx dy dz &= \int_{-1}^2 \left\{ \int_1^2 \left\{ \int_{-2}^2 (4xy - 3z^2) dz \right\} dx \right\} dy \\
 &= \int_{-1}^2 \left\{ \int_1^2 \left\{ [4xyz - z^3]_{z=-2}^{z=2} \right\} dx \right\} dy \\
 &= \int_{-1}^2 \left\{ \int_1^2 \{(8xy - 8) - (-8xy + 8)\} dx \right\} dy \\
 &= \int_{-1}^2 \left\{ \int_1^2 (16xy - 16) dx \right\} dy = \int_{-1}^2 \left\{ [8x^2y - 16x]_{x=1}^{x=2} \right\} dy \\
 &= \int_{-1}^2 \{(32y - 32) - (8y - 16)\} dy = \int_{-1}^2 (24y - 16) dy \\
 &= [12y^2 - 16y]_{-1}^2 = (48 - 32) - (12 + 16) = 16 - 28 = -12
 \end{aligned}$$

ちなみに、 $x \rightarrow y \rightarrow z$ の順に積分すると

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\substack{1 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 2 \\ -2 \leq z \leq 2}} (4xy - 3z^2) dx dy dz &= \int_{-2}^2 \left\{ \int_{-1}^2 \left\{ \int_1^2 (4xy - 3z^2) dx \right\} dy \right\} dz \\
 &= \int_{-2}^2 \left\{ \int_{-1}^2 \left\{ [2x^2y - 3xz^2]_{x=1}^{x=2} \right\} dy \right\} dz \\
 &= \int_{-2}^2 \left\{ \int_{-1}^2 \{(8y - 6z^2) - (2y - 3z^2)\} dy \right\} dz \\
 &= \int_{-2}^2 \left\{ \int_{-1}^2 (6y - 3z^2) dy \right\} dz = \int_{-2}^2 \left\{ [3y^2 - 3yz^2]_{y=-1}^{y=2} \right\} dz \\
 &= \int_{-2}^2 \{(12 - 6z^2) - (3 + 3z^2)\} dz = \int_{-2}^2 (9 - 9z^2) dz \\
 &= [9z - 3z^3]_{-2}^2 = (18 - 24) - (-18 + 24) = -6 - 6 = -12
 \end{aligned}$$

で同じ結果になる。

資料置場

<https://www.gen.kanagawa-it.ac.jp/takeda/class/>

・重積分の応用（曲線の長さ）

曲線 $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ ($0 \leq x \leq 3$) の長さを求めよ。

2019年度神奈川工科大学 微分積分学Ⅱ－d 演習問題	学科	学年	組	学 籍 番 号	氏 名	

提出先：K3-3309号室前 16番のボックス 提出期限：12月12日（木）17時頃まで