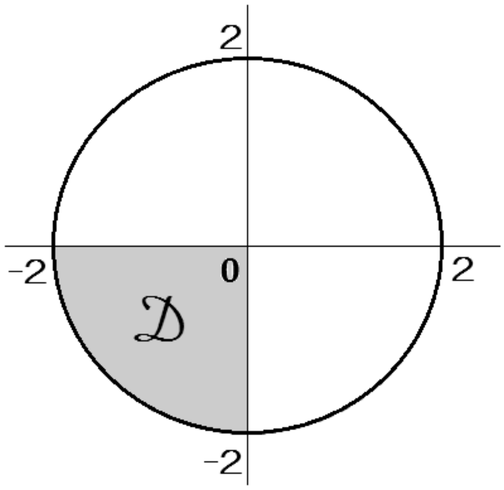
微分積分学 Ⅱ-d　V 科　前回の解答例　2019.12. 4 分

次の重積分の積分領域を図示し、置換積分（極座標変換）を使って計算せよ。

$$\iint_{\substack{0 \leqq x^2+y^2 \leqq 2^2 \\ x \leqq 0 \\ y \leqq 0}} 12xy^3\,dxdy$$



領域 D は、原点を中心とした半径 r の円の方程式が $x^2+y^2=r^2$ なので、$0 \leqq x^2+y^2 \leqq 2^2$ は半径 2 の円の内部であり、さらに条件 $x \leqq 0, y \leqq 0$ によって第 3 象限に限定されるので、次のような領域になる。

この領域を極座標変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ すると、

$\begin{cases} 0 \leqq r \leqq 2 \\ \pi \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi \end{cases}$ となる。また、ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

である。また、$r>0$ であるから $dxdy = r\,drd\theta$ となる。つまり積分は

$$\begin{aligned}
\iint_{\substack{0 \leqq x^2+y^2 \leqq 2^2 \\ x \leqq 0 \\ y \leqq 0}} 12xy^3\,dxdy &= \iint_{\substack{0 \leqq r \leqq 2 \\ \pi \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi}} 12 \times (r\cos\theta)(r\sin\theta)^3 \times r\,drd\theta \\
&= \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \left\{ \int_0^2 12r^5\cos\theta\sin^3\theta\,dr \right\} d\theta = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \left[2r^6\cos\theta\sin^3\theta \right]_{r=0}^{r=2} d\theta \\
&= \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} 128\cos\theta\sin^3\theta\,d\theta \quad \left(u=\sin\theta\ \text{で変数変換。}d\theta = \frac{1}{\cos\theta}\,du\right)
\end{aligned}$$

(積分範囲は $\theta=\pi$ のとき $u=0$，$\theta=\frac{3}{2}\pi$ のとき $u=-1$)

$$= \int_0^{-1} 128u^3\,du = \left[32u^4\right]_0^{-1} = 32-0 = 32$$

注：r の次数を間違えやすいので注意が必要。x にも y にも r があり、
さらにヤコビアンにも r があるので、数え間違えの無いように !!

ちなみに、通常の重積分では次のように計算できる。

$$\begin{aligned}
\iint_{\substack{0 \leqq x^2+y^2 \leqq 2^2 \\ x \leqq 0 \\ 0 \leqq y}} 12xy^3\,dxdy &= \int_{-2}^{0} \left\{ \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} 12xy^3\,dx \right\} dy = \int_{-2}^{0} \left[6x^2y^3 \right]_{x=-\sqrt{4-y^2}}^{x=0} dy \\
&= \int_{-2}^{0} \left\{ 0 - 6(4-y^2)y^3 \right\} dy = \int_{-2}^{0} \left(-24y^3 + 6y^5 \right) dy \\
&= \left[-6y^4 + y^6 \right]_{-2}^{0} = 0 - (-96+64) = 32
\end{aligned}$$

資料置場

https://www.gen.kanagawa-it.ac.jp/takeda/class/

2019年度 微分積分学Ⅱ－d　小テスト解答用紙　2019.12.10

・重積分の応用（３重積分）

３重積分 $\displaystyle\iiint_{\substack{1 \leqq x \leqq 2 \\ -1 \leqq y \leqq 2 \\ -2 \leqq z \leqq 2}} (4xy - 3z^2)\, dxdydz$ を $z \to x \to y$ の順に積分せよ。

2019年度神奈川工科大学 微分積分学 Ⅱ－d 演習問題	学科	学年	組	学　籍　番　号	氏　　　名	

提出先：K3-3309号室前　16番のボックス　提出期限：１２月１１日（水）授業開始まで