微分積分学 Ⅱ-d　　V科　　前回の解答例　　　　　　　　　　　2019.11. 5 分

$x^2+4y^2-8=0$ の条件のもとで、x^2-2y の値の最大値を求めよ。

(1) ラグランジュの未定係数法を用いるために $F(x,y,\lambda)$ を求める

$$F(x,y,\lambda)=\left(x^2-2y\right)-\lambda\left(x^2+4y^2-8\right)$$

(2) $F_x(x,y,\lambda), F_y(x,y,\lambda)$ を求める。

$$F_x(x,y,\lambda)=2x-\lambda\,(2x)\ ,\quad F_y(x,y,\lambda)=-2-\lambda\,(8y),\quad F_\lambda(x,y,\lambda)=-(x^2+4y^2-8)$$

(3) $F_x(x,y,\lambda)=0, F_y(x,y,\lambda)=0$ を同時に満たす x,y の関係式を求めよ。

$8y\times F_x-2x\times F_y=16xy+4x=4x(4y+1)=0$　なので、$x=0$ もしくは $y=-\frac{1}{4}$

(4) (3) で求めた関係式を元の条件に代入して極値の候補を求めよ

《$x=0$ のとき》　$4y^2-8=0\ \Rightarrow\ y^2=2$　なので、$y=\pm\sqrt{2}$

《$y=-\frac{1}{4}$ のとき》　$x^2+\dfrac{1}{4}-8=0\ \Rightarrow\ x^2=\dfrac{31}{4}$　なので、$x=\pm\frac{\sqrt{31}}{2}$

つまり $(0,\sqrt{2})$, $(0,-\sqrt{2})$, $(\frac{\sqrt{31}}{2},-\frac{1}{4})$, $(-\frac{\sqrt{31}}{2},-\frac{1}{4})$ の４点が候補となる。

(5) すべての極値の候補を $\dfrac{x^2}{4}-y$ に代入して最大値および最小値を考えると

《$(0,\sqrt{2})$ のとき》　$x^2-2y=0-2\times\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$

《$(0,-\sqrt{2})$ のとき》　$x^2-2y=0-2\times(-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

《$(\frac{\sqrt{31}}{2},-\frac{1}{4})$ のとき》　$x^2-2y=\frac{31}{4}-2\times(-\frac{1}{4})=\frac{33}{4}$

《$(-\frac{\sqrt{31}}{2},-\frac{1}{4})$ のとき》　$x^2-2y=\frac{31}{4}-2\times(-\frac{1}{4})=\frac{33}{4}$

なので、最大値は $(\pm\frac{\sqrt{31}}{2},-\frac{1}{4})$ のとき $x^2-2y=\frac{33}{4}$

（ちなみに最小値は $(0,\sqrt{2})$ のとき $x^2-2y=-2\sqrt{2}$）

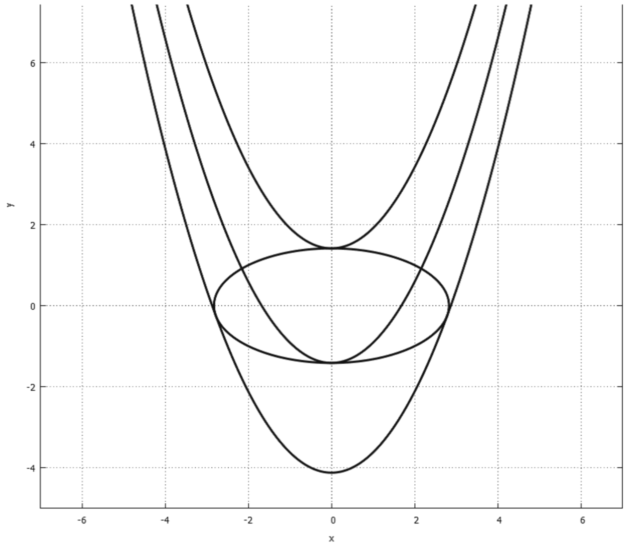

図１：$x^2+4y^2-8=0$（楕円）のグラフと
$x^2-2y=\frac{33}{4}$,　$x^2-2y=\pm2\sqrt{2}$ のグラフ（２次関数）

資料（主に解答と演習問題）の置き場

https://www.gen.kanagawa-it.ac.jp/takeda/class/

演習の紙をなくした場合は、上記ページからダウンロードして印刷し、提出すること。
（提出先はレポートＢＯＸまたは授業の際に提出）