

関数 $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 9xy$ の極値を次の設問にしたがって求めよ。

(1) $f_x(x, y), f_y(x, y)$ を求めよ

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 9y, \quad f_y(x, y) = 6xy - 9x$$

(2) $f_x(x, y) = 0, f_y(x, y) = 0$ を同時に満たす x, y を求めよ。

方程式は

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 9y = 0 & \cdots \text{(i)} \\ 6xy - 9x = 0 & \cdots \text{(ii)} \end{cases}$$

なので、(ii) 式は $3x(2y - 3) = 0$ と因数分解できるので、 $x = 0$ または $y = \frac{3}{2}$ である。

$x = 0$ を (i) に代入すると

$$3y^2 - 9y = 0 \Rightarrow 3y(y - 3) = 0 \Rightarrow y = 0, 3$$

つまり極値を取る点の候補は $(0, 0), (0, 3)$ である。また、 $y = \frac{3}{2}$ を (i) に代入すると

$$3x^2 + \frac{27}{4} - \frac{27}{2} = 0 \Rightarrow 3x^2 = \frac{27}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{3}{2}$$

つまり極値を取る点の候補は $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}), (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ である。

よって、極値をとる点の候補は $(0, 0), (0, 3), (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}), (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ の4点である。

(3) $f_{xx}(x, y), f_{yy}(x, y), f_{xy}(x, y)$ を求めよ

$$f_{xx}(x, y) = 6x, \quad f_{yy}(x, y) = 6x, \quad f_{xy} = 6y - 9$$

(4) $\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$ を求める。

$$\Delta(x, y) = 6x \times 6x - (6y - 9)^2 = 36x^2 - (6y - 9)^2$$

(5) $\Delta(x, y)$ と $f_{xx}(x, y)$ を使って極値の判定。

$$\Delta(0, 0) = 0 - (-9)^2 = -81 < 0 \text{ なので極値でない。}$$

$$\Delta(0, 3) = 0 - (9) = -81 < 0 \text{ なので極値でない。}$$

$$\Delta\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 81 - (0)^2 = 81 > 0 \text{ なので極値である。}$$

$$\text{特に } f_{xx}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 9 > 0 \text{ なので極小}$$

$$\Delta\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 81 - (0)^2 = 81 > 0 \text{ なので極値である。}$$

$$\text{特に } f_{xx}\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = -9 < 0 \text{ なので極大}$$

以上のことをまとめると

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{ のとき } f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8} + \frac{81}{8} - \frac{81}{4} = -\frac{54}{8} = -\frac{27}{4} \text{ で極小値を取り、}$$

$$\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{ のとき } f\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} - \frac{81}{8} + \frac{81}{4} = \frac{54}{8} = \frac{27}{4} \text{ で極大値を取る。}$$

・陰関数

$x^2 - 3xy + 5y^2 - 9 = 0$ が定める陰関数のグラフについて、次の問に答えよ

- (1) グラフ上の点 $(-4, -1)$ における接線の方程式を求めよ。
- (2) 陰関数の極値を取る点の候補を見つけよ。

ヒント) 接線の方程式は分数を含み、極値を取る点の候補は $\sqrt{\quad}$ を含みます。

2019年度神奈川工科大学 微分積分学Ⅱ－d 演習問題	学科	学年	組	学 籍 番 号	氏 名	

提出先：K3-3309号室前 16番のボックス 提出期限：10月30日（水）授業開始まで