微分積分学 Ⅱ-d　V科　前回の解答例　2019.10. 9分

・１変数のテイラーの定理（復習）

$f(x)=\sqrt[3]{x+1}=(x+1)^{\frac{1}{3}}$ のマクローリン展開において x^3 の項までの和

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

を求め、$x=-0.1$ を代入して $\sqrt[3]{0.9}=0.9654893846\cdots$ の近似値を電卓を使って求めよ。

$f(x)=\sqrt{x+1}$ の 4 次までの導関数を求めると次の通りである。

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}\ ,\ f''(x)=-\frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}}\ ,\ f^{(3)}(x)=\frac{10}{27}(x+1)^{-\frac{8}{3}}$$

よってマクローリン展開において x^3 の項までの和は

$$\begin{aligned} f(x)=&f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3\\ =&1+\frac{\frac{1}{3}}{1}x+\frac{-\frac{2}{9}}{2}x^2+\frac{\frac{10}{27}}{6}x^3\\ =&1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3 \end{aligned}$$

となる。これに $x=-0.1=-\frac{1}{10}$ を代入すると、

$$1-\frac{1}{30}-\frac{1}{900}-\frac{5}{81000}=\frac{15641}{16200}=0.96549382\cdots$$

のように、真の値 $\sqrt[3]{0.9}=0.9654893846\cdots$ にかなり近い値であることがわかる。

ちなみに、

1 次まで　$\dfrac{29}{30}=0.96666\cdots$

2 次まで　$\dfrac{869}{900}=0.96555$

⋮　⋮

5 次まで　$\dfrac{35192089}{36450000}=0.9654894101\cdots$

7 次まで　$\dfrac{95018637803}{98415000000}=0.9654893847\cdots$

のように真の値にだんだん近づいている。ただし、このマクローリン展開を使って近似値を求められるの x には範囲があり、$x=2$ を代入して $\sqrt[3]{3}$ の値を求めようとすると、おかしな結果となる（とんでもなく大きな値になったり、負の値になったりと発散する）。

資料置場

https://www.gen.kanagawa-it.ac.jp/takeda/class/

2019年度 微分積分学Ⅱ－d　小テスト解答用紙　2019.10.15

・２変数関数のテイラーの定理

関数 $f(x,y) = e^{2x}\sin y$ を３次の項までマクローリン展開せよ。（例題 6.9 を参照にすること）
また、その結果に $x = 0.1,\ y = -0.1$ を代入して $e^{0.2}\sin(-0.1) = -0.1219368104489\cdots$
と比較せよ。

2019 年度神奈川工科大学 微分積分学 Ⅱ－d 演習問題	学科	学年	組	学　籍　番　号	氏　　　名	

提出先：K3-3309 号室前　16 番のボックス　提出期限：１０月１６日（水）授業開始まで